I − 6

簡便な離散手法を用いた柔な構造物の動的解析

東北大学工学部　○学生員　斉木　功
東北大学工学部　　正　員　岩熊　哲夫
東北大学工学部　　正　員　中沢　正利

1.　まえがき

大回転及び自由飛行を伴う棒部材の有限要素動的解析手法は多数発表されている．その支配方程式の定式化の手法は，空間固定の座標系を用いるものと，要素と共に移動する座標系を用いるものとに大別される．文献 [1] などでも述べられているように，固定座標系は慣性項を簡潔に記述できるが，内力項は複雑になる．一方，移動座標系では内力項は簡単になるが，慣性項が複雑になる．ところがエネルギーは不変量であり，いかなる座標系で表してもよく，慣性項と内力項をそれぞれ別の座標系で考え効率よく定式化した例もある [3]．

以上のことを踏まえた上で，さらに物理的に無視し得る微小項を省略し，簡潔な定式化を試みた．定式化は仮想仕事の原理に基づいて行った．結果として得られた運動方程式はエネルギー原理に反しているようにみえるが，Bernoulli − Euler 梁の平面問題を例に取り，エネルギー原理を満たす運動方程式による数値解及び方程式と比較することによって妥当性を検討する．

2.　運動方程式

(1)　剛性項

梁の有限要素における任意の点の変位は，剛体移動および剛体回転による変位と，内力の発生に寄与する実質的な変形による変位とに分けることができる．従って，通常，微小ひずみが成立する限り，要素をある程度小さくすれば要素内の変形量を小さくできるため，実質的な変形に関しては線形理論の剛性行列が使える [2]．

(2)　慣性項と運動方程式

全体座標系における梁の任意点の変位成分を $\boldsymbol{u} \equiv \lfloor u_x\ u_y \rfloor^T$ とすると，慣性仮想仕事項は

$$\int_V \delta \boldsymbol{u}^T \rho \ddot{\boldsymbol{u}} \mathrm{d}V = \int_V \rho\left(\ddot{u}_x \delta u_x + \ddot{u}_y \delta u_y\right) \mathrm{d}V \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

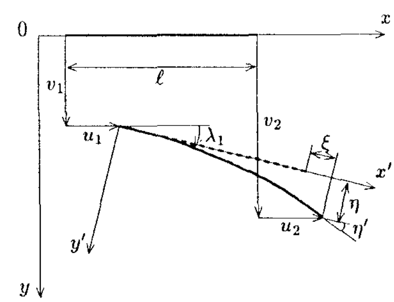
となる．一方図示したように λ_1 だけ回転した局所座標系での仮想変位成分を $\lfloor \delta\xi_x\ \delta\xi_y \rfloor^T$ とすると，$\delta\boldsymbol{u}$ との間には

$$\left\{\begin{array}{c} \delta u_x \\ \delta u_y \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc} \cos\lambda_1 & -\sin\lambda_1 \\ \sin\lambda_1 & \cos\lambda_1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \delta\xi_x \\ \delta\xi_y \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

が成り立つ．梁理論の変位場をこの双方に仮定すると，

$$\left\{\begin{array}{c} u_x \\ u_y \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right\} - y \left\{\begin{array}{c} \sin\lambda \\ \cos\lambda - 1 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

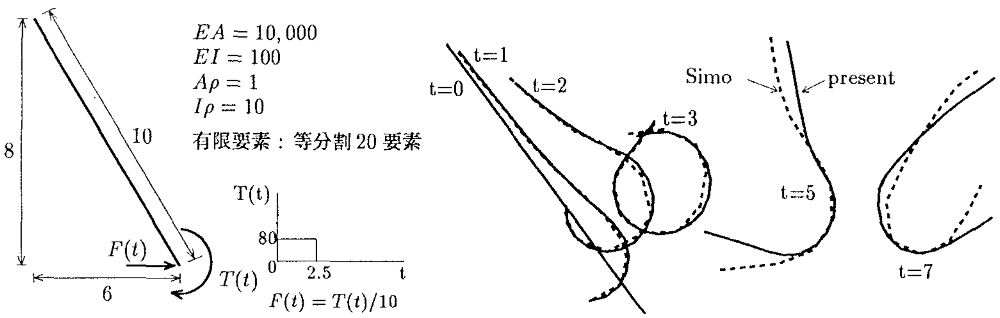
$$\left\{\begin{array}{c} \delta\xi_x \\ \delta\xi_y \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \delta\xi \\ \delta\eta \end{array}\right\} - y \left\{\begin{array}{c} \delta\eta' \\ 0 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$



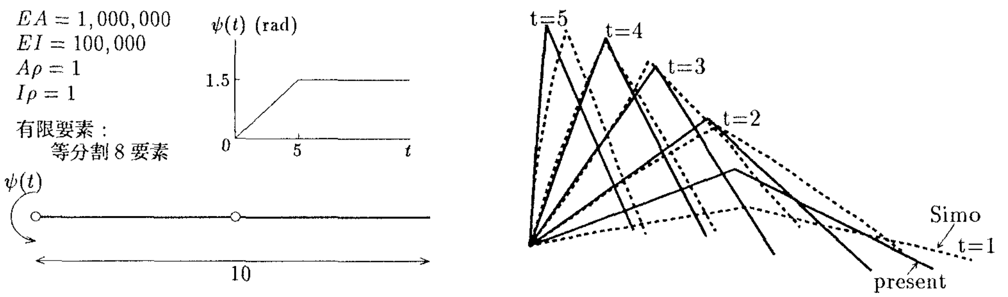
図−1　座標系と変位成分

と書ける．ここに $\lfloor u\ v \rfloor^T$ 及び $\lfloor \delta\xi\ \delta\eta \rfloor^T$ は中立軸の全体座標系変位成分及び局所座標系仮想変位成分である．剛性項と同様，ξ, η に関しては回転成分を除去して考えていくらでも小さくできることを前提とし，微小変位理論の枠内で考えた．式 (2) (3) (4) を 式 (1) に代入し，全体座標系と局所座標系の変位成分の関係が

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{u}_a = \boldsymbol{d}_1 + x\boldsymbol{D} + \boldsymbol{T\xi}, \qquad \boldsymbol{u}_a^T \equiv \lfloor u\ v\ \lambda \rfloor \\ \boldsymbol{d}_i^T \equiv \lfloor u_i\ v_i\ \lambda_i \rfloor, \qquad \boldsymbol{D}^T \equiv \lfloor \ell(\cos\lambda_1 - 1) \quad \ell\sin\lambda_1 \quad 0 \rfloor, \qquad \boldsymbol{\xi} \equiv \lfloor \xi\ \eta\ \eta' \rfloor \\ \boldsymbol{T} \equiv \left[\begin{array}{ccc} \cos\lambda_1 & -\sin\lambda_1 & 0 \\ \sin\lambda_1 & \cos\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$



図−2 集中荷重及びモーメントを受け自由飛行する柔な梁



図−3 中間にヒンジを有する構造の強制変位応答

と表されることを考慮し[2]，ξ, η にそれぞれ1次，3次の多項式で変位関数を与えると，最終的に運動方程式が

$$M(\lambda_1)\lfloor \ddot{d}_1\ \ddot{d}_2 \rfloor^T + \boldsymbol{f}_i(\dot{d}_1, \dot{d}_2, \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2) + \boldsymbol{f}_e(\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2) + \boldsymbol{f}_{ext} = 0 \quad \cdots\cdots (6)$$

と求まる．この式の第1，2項が慣性力に関する項，第3項が内力に関する項，第4項が外力に関する項である．また M は 6×6 の行列である．

3. 数値解析例

式(6)を連立一階常微分方程式に変換し，Runge–Kutta 法を用いて **図−2**にあるような集中荷重を受ける両端自由の梁と，図**−3** に示した中間にヒンジを有する構造を解析した．その結果，いずれも Simo らの結果と良く一致した．Simo らは Timoshenko 梁で定式化をしているが，この例では細長比が 100 もしくは 31.6 と大きくせん断の影響は少ないと考えて，ここでは比較した．

4. 結論

解析結果から分かるように，本理論に基づき近似的に求められた簡潔な運動方程式によっても，工学的に十分意味のある数値解析ができることが明らかになった．

参考文献

1) J. C. Simo and L. Vu-Quoc: ON the Dynamics of flexible beams under large overall motions — the plain case. Parts 1 & 2, J. Appl. Mech. vol.53, pp849–863 (1986)
2) T. Iwakuma *et al.*: Principle and numerical check of a stiffness equation for plane frames, Proc. of JSCE, No.380 (1987)
3) 井浦　雅司：棒部材の動的解析に関する一手法，第48回年次学術講演会講演概要集1，土木学会，pp1404–1405 (1993)