I－4

アダプティブ有限要素法における新事後誤差評価

岩手大学工学部　学生員　○段　梅
岩手大学工学部　正　員　岩崎正二
岩手大学工学部　正　員　宮本　裕
中国西南交通大学　周　本寛
岩手大学工学部　正　員　出戸秀明

1.まえがき：アダプティブ有限要素法のｐ－型法は、要素の形状を変えないで形状関数の次数を増やすことにより解の近似誤差を減少させる方法である。この方法は1971年に米国のWashington大学応用科学研究所で始められた。ｐ－型法はｈ－型法の発展段階でが考え出された。ｐ－型法は、精度と計算効率などがｈ－型法より優れている[1]。従って，ｐ-型法を検討するのは重要な意義がある。事後誤差評価は、アダプティブ有限要素法の解が収束しているのかどうかを判定する根拠となる。厳密な事後誤差評価式があるならば，アダプティブ有限要素法で有限要素の解の収束過程を加速させることができ，要素の最適化が容易となり計算のための仕事量が大幅に減少する。従って，事後誤差評価を研究するのはアダプティブ有限要素法について重要な部分である。本研究において，著者はｐ－型のアダプティブ有限要素法に関して事後誤差評価式を提案する。この事後誤差評価式は変位型有限要素法と多変量有限要素法(応力法、混合法等)のいずれにも有効である。最後に２次元弾性力学問題について，変位型及び多変量の有限要素法により新事後誤差評価式を検討する。

２．Ｐ－型の事後誤差評価：ここで著者等は、外挿法によりＰ－型の事後誤差評価式を与える。

2.1変位型有限要素法:変位型有限要素法のＰ－型について，$\|u-u_p\|_1 \leqq Cp^{-(k-1)}\|u\|_k$ の関係がある。ここで、 u, u_p, pはそれぞれ厳密解、有限要素法解、有限要素法解の次数である。外挿法から，$\forall\ p>0$，$\|u\|_1$における近似解u^*はつぎようになる。

$$u^*=\frac{(p+1)^{-(k-1)}\|u_p\|_1-p^{-(k-1)}\|u_{p+1}\|_1}{(p+1)^{-(k-1)}-p^{-(k-1)}} \tag{2-1}$$

式(2-1)に文献［2］の定理2を用いると，次式が成立する。 $\lim_{p\to+\infty} u^*=\|u\|_1$

従って，$\|u\|_1$の近似解として，u^*を用いて計算することができるので，解の誤差$\|e\|_1$は次式のようになる。

$$\|e\|_1=\frac{p^{-(k-1)}(\|u_p\|_1-\|u_{p+1}\|_1)}{(p+1)^{-(k-1)}-p^{-(k-1)}} \tag{2-2}$$

2.2 多変量有限要素法:多変量有限要素法のＰ－型について，つぎの関係式がある[3]。

$$\|u-u_{p1}\|_{l1}\leqq C_2p_1^{-(k1-l1)}\|u\|_{k1},\ \|\phi-\phi_{p2}\|_{l2}\leqq C_3p_2^{-(k1-l1)}\|u\|_{k1}+C_2p_2^{-(k2-l2)}\|\phi\|_{k2} \tag{2-3}$$

ここで、(u,ϕ)，(u_{p1},ϕ_{p2})，(P_1,P_2)はそれぞれ厳密解、有限要素法解、有限要素法解の次数である。

式(2-3)の第１式から(2-1)と同様な式が得られ，第２式から次の結果が得られる。

(i) ϕ_{p2}の次数がP_2+2で，u_{p1}の次数がP_1である場合，$\|\phi\|_{l2}$の近似外挿式は式(2-1)と同様な式となる。

(ii) ϕ_{p2}の次数がP_2+2で，u_{p1}の次数がP_1よりも大きい場合，$\|\phi\|_{l2}$の近似外挿式はつぎのようになる。

$$\phi^*=\frac{\begin{vmatrix}\|\phi_{p2}\|_{l2} & \|\phi_{p2+1}\|_{l2} & \|\phi_{p2+2}\|_{l2}\\ p_1^{-(k1-l1)} & (p_1+n)^{-(k1-l1)} & (p_1+n+1)^{-(k1-l1)}\\ p_2^{-(k2-l2)} & (p_2+1)^{-(k2-l2)} & (p_2+2)^{-(k2-l2)}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ p_1^{-(k1-l1)} & (p_1+n)^{-(k1-l1)} & (p_1+n+1)^{-(k1-l1)}\\ p_2^{-(k2-l2)} & (p_2+1)^{-(k2-l2)} & (p_2+2)^{-(k2-l2)}\end{vmatrix}} \tag{2-4}$$

(n=0あるいは1)

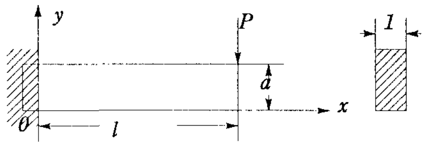
つぎに、著者等は弾性力学問題について，前述したようなｐ－型の事後誤差評価式の妥当性を検証する。

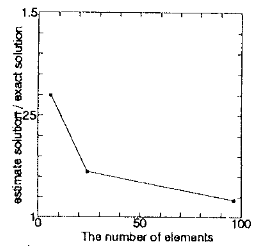
3.計算例：$p\to\infty$ 時の弾性力学問題について，つぎのような関係式が得られた。この関係式は解の誤差を

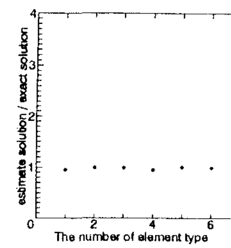
判断とする参考解として使用できる。 $U^{*}=2U_2-U_1 \quad \forall u\in H^2(\Omega)$ (2-5)

ここで, U_iは有限要素解(u, σ)のi次のひずみエネルギーである。本計算例では, 4節点の5-β、7-βハイブリッド要素及び8節点の13-β、14-β、15-βハイブリッド要素を組み合わせて用いている。ただし、βは応力パラメーターを表す。

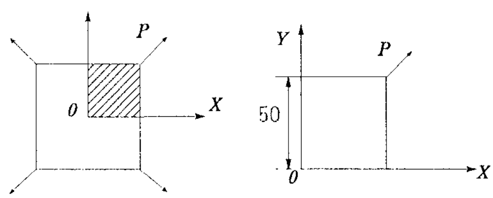
計算例1 自由端に集中力を受ける片持梁。

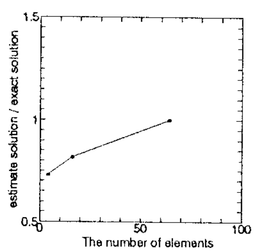


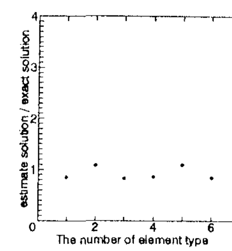




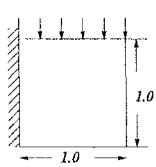
計算例2 4隅で集中荷重を受ける正方形平板。

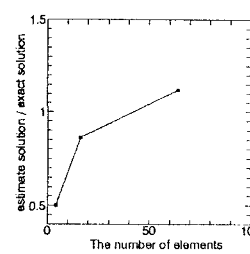




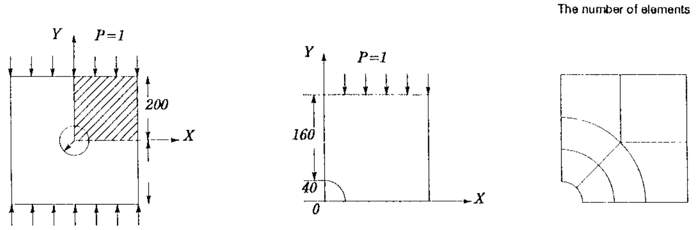


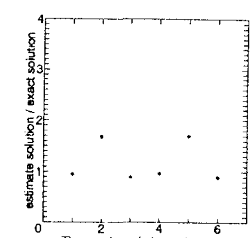
計算例3 等分布荷重が作用する短梁。





計算例4 小円穴を有する正方形板の応力集中問題。





求められたグラフからわかるようにU*の計算結果は、厳密解によく近似している。従って式(2-5)は参考厳密解として有効であるので, 式(2-2)で解の誤差を求めることができる。この式はアダプティブ有限要素法において要素の最適化の根拠を与える。また、この方法を用いて計算解に対して後処理を行うことができる。

4.結論：この論文の中で著者は、理論的にp－型事後誤差評価式を求めた。変位型有限要素法と多変量有限要素法でそれぞれ計算をした結果, この理論式の妥当性が検証された。この理論式は, アダプティブ有限要素法の要素の最適化に根拠を与えるとともに、アダプティブ有限要素法の発展のために大変意義がある。

参考文献：1. I. Babuska, B. A. Szabo and I. N. Katz, The p version of the finite element method, SIAM, J. N. A. 18(1981).

2. C. Brezinski, A general extrapolation algorithm, N. M. 35(1980).

3. B. K. Zhou, M. Duan, Error estimates of h- and p-covergence in multi-field finite elements, Proceedings of The Second Asian-Pacific Conference on Computational Mechanics, Sydney, N. S. W. AUSTRALIA, 3-6 AUGUST 1993.