

IV-45

四 辺 形 調 整

八戸工業大学 正会員 岩淵清行

1. まえがき

平成元年度の土木学会（全国）年次学術講演概要集に三角測量における最小二乗法を使つての四辺形調整に関し、今井芳雄氏⁹⁾が新しい計算式を書いておられた。この四辺形調整は、およそ測量学と名のつく本には必ず書かれているものである。ちょうどその平成元年に土木学会編土木工学ハンドブックの第四版がでたが、その事すなわち、四辺形調整に関する事が削除されていた。削除の理由をわたしは、光波測距の時代に辺長観測を含まないいわゆる四辺形調整は時代おくれだからだろうと考えた。しからば土木の現場で（時代におくれまい？と）測距・測角混合型の測量（これこそが土木で昔からおてのものであったトラバース測量である！）をやるときには、ごく少しでも定型を外れると条件方程式をたてての調整計算は手に負えないものになる。（町田氏の方法はまだよく知られてはいない。）

いみじくも上記第四版p.761にそういう場合のためにと観測方程式法による「一般的な調整計算」の手順が示されているが、肝心の観測方程式に関する説明が少ないので、初心者にはわかりにくい。とくに土木の学生にとってなじみの薄いトランシットによる水平角の方向法観測(direction observation method)における標定誤差 Δz （その本では単に z と書いてある）の説明がない。昨年私はこの“ Δz ”をあらかじめ観測方程式から取り除いておくシュライバーの消去法をこの場でのべた。しかしその頃“ Δz ”そのものの具体的意味がはっきりとは（私は）わからなかった。

たいがいの測量のテキストに標定誤差 Δz は、「観測上の誤差ではない」とかかかれているが習慣的伝統的な解きかたをする時にはこれはおかしいことに各「れん」の第一方向の観測誤差！と同じ値（但し符号反対）になるものである。その事は観測方程式をよくみればすぐに分かる事だが、何故かそう教えている人はいないようである。¹⁾

ところで、いわゆる四辺形調整はこの“ Δz ”の具体的説明を初心者にするのに適当なものと思う。勿論まだ完璧なものではないが以下において森忠次著測量学1基礎編にある問題の数値をかりて話を進める。

2. 与件

記号番号は図1のごとし。四辺形ABCDにおいて点Aと点Bは既知点、CとDは未知点である。既知座標値は $X_A=0, Y_A=0, X_B=1000m, Y_B=0$ とする。点A,B,C,Dはそれぞれ点1,2,3,4と読みかえる事がある。未知座標値の近似値としては $X_3=900, Y_3=600, X_4=500, Y_4=600$ とする。（有効数字1桁で可） 未知座標値の最確値は $X_i+\Delta X_i$ の如くに書くものとする。

野帳における整理された各測線の方向観測値 H_i （方向角では無いことに注意）は伝統にしたがい次の如く与えられる。（角の単位は、別に断わるまで、度分秒とする。） A点で $H_1=0, H_2=16.2523, H_3= 48.2540$ B点で $H_4=0, H_5=49.2502, H_6= 83.3634$ C点で $H_7=0, H_8=64.2253, H_9= 94.5746$ D点で $H_{10}=0, H_{11}=50.5120, H_{12}=133.0035$ 方向 H_i の観測精度はすべて等しいと仮定されている。その最確値は $H_i+\Delta H_i$ と書く。（なお北をアメリカ式にY軸にとっての事に注意されたし。）

3. 水平角をトランシットの方向法で測った時の観測方程式

観測方程式の原型は角の単位をラジアンにすると

$$Z_1 + \Delta Z_1 + H_1 + \Delta H_1 = \text{ATN}((X_4 + \Delta X_4 - (X_1 + \Delta X_1)) / (Y_4 + \Delta Y_4 - (Y_1 + \Delta Y_1)))$$

$$Z_1 + \Delta Z_1 + H_2 + \Delta H_2 = \text{ATN}((X_3 + \Delta X_3 - (X_1 + \Delta X_1)) / (Y_3 + \Delta Y_3 - (Y_1 + \Delta Y_1)))$$

$$Z_1 + \Delta Z_1 + H_3 + \Delta H_3 = \text{ATN}((X_2 + \Delta X_2 - (X_1 + \Delta X_1)) / (Y_2 + \Delta Y_2 - (Y_1 + \Delta Y_1)))$$

$$\begin{aligned}
Z2 + \Delta Z2 + H4 + \Delta H4 &= \text{ATN}((X1 + \Delta X1 - (X2 + \Delta X2)) / (Y1 + \Delta Y1 - (Y2 + \Delta Y2))) \\
Z2 + \Delta Z2 + H5 + \Delta H5 &= \text{ATN}((X4 + \Delta X4 - (X2 + \Delta X2)) / (Y4 + \Delta Y4 - (Y2 + \Delta Y2))) \\
Z2 + \Delta Z2 + H6 + \Delta H6 &= \text{ATN}((X3 + \Delta X3 - (X2 + \Delta X2)) / (Y3 + \Delta Y3 - (Y2 + \Delta Y2))) \\
Z3 + \Delta Z3 + H7 + \Delta H7 &= \text{ATN}((X2 + \Delta X2 - (X3 + \Delta X3)) / (Y2 + \Delta Y2 - (Y3 + \Delta Y3))) \\
Z3 + \Delta Z3 + H8 + \Delta H8 &= \text{ATN}((X1 + \Delta X1 - (X3 + \Delta X3)) / (Y1 + \Delta Y1 - (Y3 + \Delta Y3))) \\
Z3 + \Delta Z3 + H9 + \Delta H9 &= \text{ATN}((X4 + \Delta X4 - (X3 + \Delta X3)) / (Y4 + \Delta Y4 - (Y3 + \Delta Y3))) \\
Z4 + \Delta Z4 + H10 + \Delta H10 &= \text{ATN}((X3 + \Delta X3 - (X4 + \Delta X4)) / (Y3 + \Delta Y3 - (Y4 + \Delta Y4))) \\
Z4 + \Delta Z4 + H11 + \Delta H11 &= \text{ATN}((X2 + \Delta X2 - (X4 + \Delta X4)) / (Y2 + \Delta Y2 - (Y4 + \Delta Y4))) \\
Z4 + \Delta Z4 + H12 + \Delta H12 &= \text{ATN}((X1 + \Delta X1 - (X4 + \Delta X4)) / (Y1 + \Delta Y1 - (Y4 + \Delta Y4)))
\end{aligned}$$

これらを移項変形して最小二乗法用の観測方程式をつくるわけだがここではスペースの関係でH1にたいする観測方程式についてのみ考え説明する。

$X1=0, \Delta X1=0, Y1=0, \Delta Y1=0$ であるので、展開すると

$$Z1 + \Delta Z1 + H1 + \Delta H1 = \text{ATN}(X4/Y4) + Y4/(X4^2 + Y4^2) \Delta X4 - X4/(X4^2 + Y4^2) \Delta Y4$$

ここに“ $Z1 + \Delta Z1$ ”は標準角あるいは標定角または標定未知量 (orientation unknown)²⁾といわれるもので、左辺をして「方向角の最確値」にするための加数である。(点Aにおける一れんのH2およびH3にたいする観測方程式の時も同じである。) また $\text{ATN}(X4/Y4)$ は測線ADの近似座標からの逆算方向角である。

与件より $H1=0$ 、そしてまた伝統的に $Z1 = \text{ATN}(X4/Y4)$ とするものであるから

$$\Delta H1 = -\Delta Z1 + Y4/(X4^2 + Y4^2) \Delta X4 - X4/(X4^2 + Y4^2) \Delta Y4$$

しかして解を求めるにあたり、正規方程式をつくり、答えがおちつくまで繰り返し計算をする時には $\Delta X4$ や $\Delta Y4$ は零にちかづくので結局

$$\Delta H1 = -\Delta Z1$$

となる。同様に

$$\begin{aligned}
\Delta H4 &= -\Delta Z2 \\
\Delta H7 &= -\Delta Z3 \\
\Delta H10 &= -\Delta Z4
\end{aligned}$$

となる。

4. 数値計算

繰り返し後の ΔHi の結果だけを示す

(秒単位) $\Delta H1=7.906, \Delta H2=-11.561,$
 $\Delta H3=3.655, \Delta H4=-1.581,$
 $\Delta H5=3.912, \Delta H6=-2.3309,$
 $\Delta H7=3.9789, \Delta H8=5.511,$
 $\Delta H9=-9.4901, \Delta H10=11.606,$
 $\Delta H11=-6.681, \Delta H12=-4.924$

5. おわりに

$Z + \Delta Z$ の「納得のいく図示」は簡単そうでうまくかけない。しかし $\Delta H1 = -\Delta Z1$ といった関係もあるのだからそれをヒントに改良するのが残された問題である。

6. 参考文献

- 0) 今井; 土木学会第44回年次会議概要集第4部、(平成元年)
- 1) 坪川 大森 共著 測地学序説 昭和44年初版 山海堂 P.302
- 2) 測量協会 現代測量学第4巻測地測量1 昭和63年初版 日本測量協会 p.388

