Ⅲ－27

散逸関数に基づく摩擦性材料の構成則理論

東北大学　正会員　岸野佑次

1．はじめに

材料の構成則理論として塑性論は最も基本となるものであるが，塑性ポテンシャル等，物理的な意味が必ずしも明確ではない概念が用いられている．ここでは，材料内部の散逸構造を反映させ得る散逸関数に基づいて，流れ則[1]ならびに硬化・軟化則を誘導する理論を示す．従来，散逸関数に基づく構成則理論として，硬化なしの条件下で包絡定理より流れ則を定める試み[2]等があるが，本論文はエネルギーの平衡条件式を基礎とするものであり，硬化・軟化則もこの平衡条件式の時間微分により自然に与えられる．また，散逸関数とともに，散逸ひずみ成分の間の内部拘束条件式を仮定するが，これは弾性体の場合のポアソン比の仮定に類似のものである．具体例として，変形にダイレイタンシーを伴う粒状体に対する構成則への応用例を示す．

2．構成則理論の構成

1）散逸ひずみ速度と散逸仕事速度

塑性論と同様に，ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}$ が弾性ひずみ速度 e と散逸ひずみ速度 d とに分けられ，

$$\dot{\varepsilon}=e+d \tag{1}$$

と表わされ， e については応力速度 $\dot{\sigma}$ との間に通常の弾性的関係が成立するとする．また， d については，

$$d=d'+d'' \quad d'=n\,\dot{\alpha} \quad d''=C\,l\,\dot{\alpha} \tag{2}$$

と分解することとする．ここに，d'，d'' は，それぞれ，散逸変形に関わる主散逸ひずみ速度，および従散逸ひずみ速度とし，n，l は各ひずみ速度の方向を表わすテンソル（$n{:}n=1$，$l{:}l=1$，$l{:}n=0$）とする．また，

$$\alpha=\int\dot{\alpha}\,dt \qquad \dot{\alpha}\equiv n{:}d \tag{3}$$

は，散逸変形の進行を表わす変形パラメータであり，

$$C=C(\sigma,n,\alpha) \tag{4}$$

は，散逸ひずみ速度成分間の拘束を表わすための内部拘束関数である．内部拘束は，たとえば金属塑性論においては，体積ひずみ速度＝0のように与えられる．また，拘束関数の役割は弾性体におけるポアソン比と同様である．

以上のように定義される散逸ひずみ速度に対して，散逸仕事速度が次式のように与えられる．

$$\sigma{:}d=\omega\,\dot{\alpha} \quad \omega\equiv\sigma{:}(n+C\,l) \tag{5}$$

ここに，ω は単位の主散逸ひずみあたりの散逸仕事を表わす．

2）散逸関数

散逸関数は，単位の主散逸ひずみに対して材料内部において発生する散逸エネルギーを巨視的に反映させるための正値関数であり，次のように与えられる．

$$\varphi=\varphi(\sigma,n,\alpha)\geq 0 \quad (\text{for } n{:}n=1) \tag{6}$$

式$(5)_2$ の散逸仕事速度は，$n\,(n{:}n=1)$ の方向によっては負になり得るが，式(6)の散逸関数は常に正値である．この様子を散逸ひずみ速度空間で示せば，たとえば，図１のようになる．

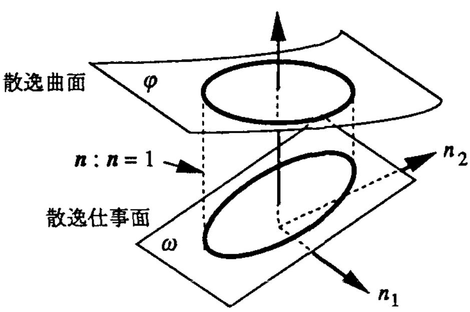

図１　散逸関数の概念図

散逸関数を表わす面を散逸曲面，単位の主散逸ひずみあたりの仕事 ω を表わす平面を散逸仕事面と称する．

3）散逸条件と流れ則

ここで，拘束条件（$n{:}n=1$，$l{:}n=0$）のもとに，散逸仕事面が散逸曲面に接するときに散逸ひずみが生じるとする．まず，両者が交線をもつ条件は散逸エネルギーに関する平衡条件式

$$f\equiv\varphi-\omega=0 \tag{7}$$

で与えらる．φ の正値性より，散逸変形を生じる前の段階においては，図１のように $n{:}n=1$ となる全ての n に対して $f>0$ であるので，散逸仕事面が散逸曲面に接する条件は式(7)とともに，f が極小となることが必要である．この条件は次式で与えられる．

$$\frac{\partial F}{\partial n}=0 \quad F\equiv f+A\sqrt{n{:}n}+B\,n{:}l \tag{8}$$

ここに，A,B はラグランジュの未定係数であり，上式と n および l との複内積より次式のように求まる．

$$A=n{:}\tau,\quad B=l{:}\tau \quad \tau\equiv\sigma-\frac{\partial\varphi}{\partial n}+(\sigma{:}l)\frac{\partial C}{\partial n} \tag{9}$$

したがって，次の流れ則を得る．

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{\tau}-(\boldsymbol{l}:\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{n}:\boldsymbol{\tau}} \tag{10}$$

または，$\boldsymbol{n}:\boldsymbol{n}=1$ より，$\boldsymbol{n}:\boldsymbol{\tau}>0$ のとき次式を得る．

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{\tau}-(\boldsymbol{l}:\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{l}}{\sqrt{\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{\tau}-(\boldsymbol{l}:\boldsymbol{\tau})^2}} \tag{11}$$

上式において，$\boldsymbol{\tau}$ が応力 $\boldsymbol{\sigma}$ と変形パラメーター α のみの関数であれば，$\boldsymbol{n}$ は上式より直ちに求めることができる．一般には $\boldsymbol{\tau}$ は $\boldsymbol{n}$ の関数となり得るので，式(11) は $\boldsymbol{n}$ を求めるための方程式とみなされる．$\boldsymbol{n}$ が簡単に求まる関数形については5）に示す．

4）硬化・軟化則

散逸が継続して生じるためには，散逸条件式(7)を満たし続ける必要がある．式(7)の時間微分は，

$$\dot{f}=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}+\frac{\partial f}{\partial \alpha}\dot{\alpha}+\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}:\dot{\boldsymbol{n}}=0 \tag{12}$$

であるが，簡単のため $\dot{\boldsymbol{l}}=0$ を仮定し，$(\boldsymbol{n}:\boldsymbol{n})^{\cdot}=0$，$(\boldsymbol{n}:\boldsymbol{l})^{\cdot}=0$ を考慮すれば，第3項は零となる．これより，次の硬化・軟化則が得られる．

$$\dot{\alpha}=\frac{\boldsymbol{m}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}}{D} \tag{13}$$

ここに，

$$\boldsymbol{m}\equiv\boldsymbol{n}+C\boldsymbol{l}+(\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{l})\frac{\partial C}{\partial \boldsymbol{\sigma}}-\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{14}$$

$$D\equiv\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}-(\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{l})\frac{\partial C}{\partial \alpha} \tag{15}$$

である．

以上より，最終的に散逸ひずみ速度が次式のように求まる．

$$\boldsymbol{d}=\frac{(\boldsymbol{n}+C\boldsymbol{l})\boldsymbol{m}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}}{D} \tag{16}$$

5）グレイド1の材料モデル

拘束関数 C および散逸関数 φ が，それぞれ，次式のように $\boldsymbol{n}$ の線形関数で与えられるモデルをグレイド1の材料モデルと称する．

$$C=C_0(\boldsymbol{\sigma},\alpha)+\boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{\sigma},\alpha):\boldsymbol{n} \tag{17}$$

$$\varphi=\varphi_0(\boldsymbol{\sigma},\alpha)+\boldsymbol{\varphi}_1(\boldsymbol{\sigma},\alpha):\boldsymbol{n} \tag{18}$$

ここに，C_0，φ_0 はスカラー，$\boldsymbol{C}_1$，$\boldsymbol{\varphi}_1$ はテンソルの係数である．グレイド1の材料モデルに対して，式(11) の $\boldsymbol{\tau}$ は

$$\boldsymbol{\tau}\equiv\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\varphi}_1+(\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{l})\boldsymbol{C}_1 \tag{19}$$

と表わすことができ，式(11)より直ちに $\boldsymbol{n}$ を求めることができる．式(17)，(18)の第2項は散逸変形にともなう移動硬化を表わすことなどのために用いることができよう．なお，$\boldsymbol{C}_1$ および $\boldsymbol{\varphi}_1$ を0と置いたモデルをグレイド0のモデルと称する．

3．粒状体の構成則の例

粒状体においては，せん断に伴って体積変化が生じる．いま，散逸体積ひずみを従属量とし，$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{I}/\sqrt{3}$（$\boldsymbol{I}$ は単位テンソル）と置くと，散逸ひずみ速度は

$$\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{n}+C\boldsymbol{I}/\sqrt{3})\dot{\alpha} \tag{20}$$

と表わされる．さらに，C および φ の関数形を次のように単純化したグレイド0の材料モデルを仮定する．

$$C=C_0(\alpha) \tag{21}$$

$$\varphi=M(\alpha)p\ ,\quad p\equiv\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}/3 \tag{22}$$

流れ則は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{\sigma}-p\boldsymbol{I}/\sqrt{\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\sigma}-3p^2} \tag{24}$$

また，硬化・軟化則，式(13) に用いられる $\boldsymbol{m}$ および D は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{m}\equiv\boldsymbol{n}+\frac{C_0}{\sqrt{3}}\boldsymbol{I}\qquad D\equiv\frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha}-\sqrt{3}\,p\frac{\partial C_0}{\partial \alpha} \tag{25}$$

簡単な関数形を仮定した計算例（平均応力一定3軸圧縮試験）を図2，3に示す．

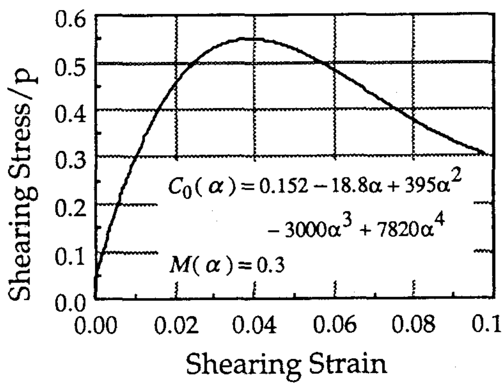

図2　応力ひずみ曲線

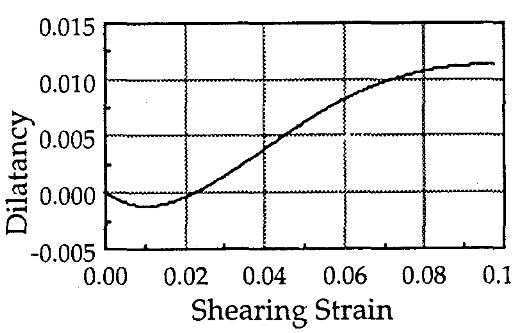

図3　ダイレイタンシー曲線

参考文献　1) 岸野：散逸関数に基づく粒状体の流れ則の誘導，土木学会論文集 394，pp.115-122 (1988).　2) Chandler, H.W.: A plasticity theory without Drucke's postulate suitable for granula materials, J. Mech. Phys. Solids 33, pp.215-226 (1985).