

Ⅲ - 6

ループテンソルによる粒状体の間隙分布の解析とその考察

東北学院大学大学院 学生員 ○安保祥成
正員 佐武正雄

1. まえがき

粒状体において、間隙率とともにその分布が重要なことが指摘されている¹⁾。本文では、2次元のパッキングのグラフ表現において間隙とループが対応することから、一つの間隙に対してループテンソルを定義し、全体のパッキングについて平均ループテンソルと分散テンソルを導入する。平均ループテンソルは、通常枝テンソルと呼ばれるファブリックテンソルと類似のものである。分散テンソルは間隙の分布の状態を示す量と考えられ、規則配列では0となる。

本文では、これらのテンソルの定義を述べ、等円パッキングにおける平均ループテンソル・ループ分散テンソルの値を求め、その値を粒子に対するボロノイ分割図から得られる変動係数と比較・検討してみた。²⁾

2. ループテンソル・平均ループテンソル・ループ分散テンソルの定義

図示のように、一つの間隙に対応するループエレメント k に対して、ループテンソル ψ_k を次のように定義する。

$$\psi_k = \frac{1}{2} \sum_{i,j \in k} \mathbf{l}_i \otimes \mathbf{l}_j \quad (1)$$

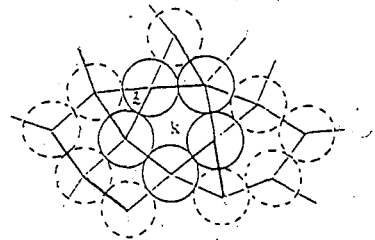


図-1 ループエレメント

ここに、 $\mathbf{l}_i$ は枝ベクトルで、 $\sum_{i,j \in k}$ は k に属するもののみについて和をとることを意味する。

次に、パッキング全体に関する平均ループテンソル $\bar{\psi}$ とループ分散テンソル $\bar{\mu}$ は次式によって定義する。

$$\bar{\psi} = \frac{1}{N} \sum \psi_k, \quad \bar{\mu} = \frac{1}{N} \sum (\psi_k - \bar{\psi})^2 \quad (2) \quad (3)$$

ここに N はパッキングに含まれるループエレメントの総数で、 $\alpha = \frac{1}{2}$ (境界の枝について)、 $\alpha = 1$ (内部の枝について) である。

3. 具体的解析例とボロノイ分割との比較

表-1に3種類の等円パッキングの例を示す。構成は、全て 16×16 (cm²) の正方形領域におけるパッキングであり、Case 1は直径2cmの円のみ、Case 2は直径2cmの円と3cmの円がほぼ同数、Case 3は直径2cmの円に直径4cmの円が6つ加わったものである。

これら各パッキングについて平均ループテンソル・ループ分散テンソルの値を求めた。また各パッキングにおける一つ一つの粒子がしめる面積を粒子ボロノイ分割から求め考察を行った。

4. 解析結果の考察

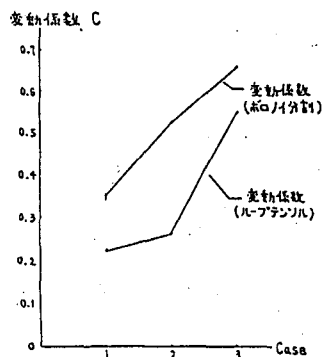
Case 1の平均ループテンソル及びループ分散テンソルの値を、Case 2・3にくらべると、等方性に近く分散が小さい密な状態のパッキングであることがわかる。Case 2とCase 3では、数値的にもさらにCase 3が異方性の傾向を強く示している。以上のことから、等粒径の粒子だけのものは全体的に均等で等方性に近く、異径粒子の混合では、粒径の差

	Case 1	Case 2	Case 3
パッキングと粒子グラフ			
ボロノイ分割図			
平均ループテンソル	$\begin{pmatrix} 1.462 & \\ & 1.317 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6.352 & \\ & 6.173 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9.693 & \\ & 8.931 \end{pmatrix}$
ループ分散テンソル	$\begin{pmatrix} 1.150 & \\ & 1.146 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.341 & \\ & 5.288 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9.059 & \\ & 8.766 \end{pmatrix}$

表-1 解析に用いたパッキングの比較

が少ないほど等方性に近くなると思われる。これらのCaseについて、さらに具体的に不均一さを比較するために、ボロノイ分割の面積の変動係数とループテンソルの変動係数 ($\sqrt{tr \mu / tr \phi}$) を図. 2 として示す。図より両者は同一の傾向を示すことが分かる。

図. 2



5. あとがき

2次元の粒子のパッキングについて、ループテンソル・平均ループテンソル・ループ分散テンソルを用いるとパッキングや間隙の性質を数値的に表現でき、解析に応用できることを説明した。今後はこれらのテンソルを粒状体の力学的性質の解析に応用してゆきたいと考えている。

・参考文献

- 1) T. Mogami, A Statistical Approach to the Mechanics of Granular Materials, Vol. 5 No.2, pp26-36, 1965
- 2) 岡部篤行他、最適配置の数理、朝倉書店 1992