

粒状体の分岐挙動の漸近近似法

東北大学工学部土木工学科土質工学研究室

○学生会員 千田 徹也

正会員 池田 清宏

正会員 柳沢 栄司

1.はじめに

粒状体の滑り線形成のメカニズムに分岐が大きく関与していることが明らかになってきている。この粒状体の分岐現象の本質的な不確定要因として、境界の不整や粒状体の不均質さ等の初期不整があげられる。Ikeda, Goto(1993)は漸近的（初期不整の値が十分小さい場合）には、初期不整の影響は分岐方程式により完全に記述できるとして、実験や解析結果に基づき、単純対称分岐点の分岐方程式のパラメータを求める手法を開発した。理論式は、分岐モードに対応する変位について書かれているが、実験ではこの変位は直接は計測できない。分岐モードに対応した変位を計測可能な一般的な変位に書き直し、実験から得られる応力比一軸歪曲線を原点補正することにより、正確な解析が可能になったことが本論文の成果である。加えて、基礎実験として行なった粒状体（砂）の排水三軸圧縮試験の実験値のヒストグラムと理論的に求めた確率密度関数とを比較し、確率論的な見知から、本理論の妥当性を検証した。

2.理論

2.1 漸近近似理論

完全系の安定な主経路上の最初の単純対称分岐点 (u_c^0, f_c^0) を考える。ここに、上付き添字(0)は完全系の値を、下付き添字(c)は特異点での値をそれぞれ表す。不完全系の釣り合い点 (u_i, f) と完全系の特異点 (u_c^0, f_c^0) の間の増分 $(\delta u_i, \bar{f})$ を、

$\delta u_i = u_i - u_c^0, \bar{f} = f - f_c^0$
と定義し、さらに、初期不整に伴う変位 $\alpha(\varepsilon)$ を用いて

$\delta u_i^* = \delta u_i - \alpha(\varepsilon)$
と変数変換すると分岐方程式は

$$\left(\delta u_i^* - r_1 \bar{f} - s_1 \delta u_i^{*2} \right) \bar{f} + p_1 \left(\delta u_i^* - r_1 \bar{f} - s_1 \delta u_i^{*2} \right)^2 + q_1 \varepsilon + h.o.t. = 0$$

となる。不完全系の釣り合い経路と放物線 $\bar{f} = -g \delta u_i^{*2}$ との交点における変位と接線の値は、いずれも

$$\delta u_i^* \Big|_{\bar{f} = -g \delta u_i^{*2}} = \left(\frac{q_1}{g - p_1} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}} + O\left(\frac{2}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}} \right)$$

$$\frac{d\bar{f}}{d\delta u_i^*} \Big|_{\bar{f} = -g \delta u_i^{*2}} = (g - 3p_1) \left(\frac{q_1}{g - p_1} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}} + O\left(\frac{2}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}} \right)$$

という1/3乗則に乗る。

実際に、Iwakuma, Holi(1992)の炭素繊維の座屈解析で、原点補正の効果を見る。圧縮荷重一先端変位曲線で原点補正したもの（図-1）と原点補正しないもの（図-2）について1/3乗則を用いる。補正したもの（図-3）は、理論値と合致しており、この手法の妥当性を示している。

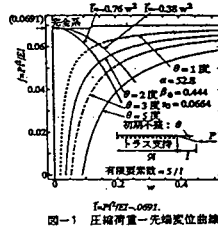


図-1 圧縮荷重一先端変位曲線

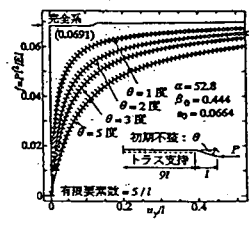


図-2 圧縮荷重一先端変位曲線
× : (1/3)乗則による予測値

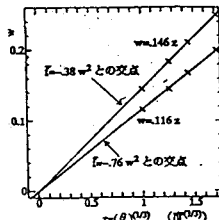


図-3 $w|_{\bar{f} = -g w^2} - \varepsilon^{1/3}$ 関係 (修正後)

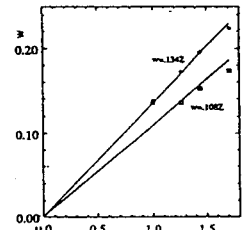


図-4 $w|_{\bar{f} = -g w^2} - \varepsilon^{1/3}$ 関係 (無修正)

2.2 確率密度関数の誘導

初期不整が正規分布に従うとき、耐荷力の低下量を支配する変数 X は、自由度2の χ^2 分布

$$f_x(x) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)$$

に従う。

正規化した耐荷力の低下量

$$\xi = \frac{\lambda_c - \lambda_c^0}{C_0 \sigma^{2/3}} = -x^{1/3}$$

を定義すると、この確率密度関数は、変数変換して

$$f_\xi(\xi) = 2f_x(x) \frac{dx}{d\xi} = \frac{3\xi^2}{2} \exp\left(-\frac{|\xi|^3}{2}\right), \quad -\infty < \xi < 0$$

と求まる。 λ_c^0 と $C_0 \sigma^{2/3}$ は実験または数値計算を繰り返し行なうことにより得た耐荷力の標本平均 $E_{\text{sample}}[\lambda_c]$ と標本分散 $Var_{\text{sample}}[\lambda_c]$ をもとに

$$C_0 \sigma^{2/3} = (Var_{\text{sample}}[\lambda_c])^{1/2} / 0.409$$

$$\lambda_c^0 = E_{\text{sample}}[\lambda_c] + 2.75(Var_{\text{sample}}[\lambda_c])^{1/2}$$

を計算すれば、確率密度関数を求めることができる。

3. 例

強度発現の基礎データとして、砂の排水三軸圧縮試験を同一条件で繰り返し行い、各最大応力を求めた。間隙比を初期不整変数と見なし、正規分布するよう管理すると、32ケースからなる標本集団を得る。分岐方程式から求めた計算値と、これらの標本の応力比-軸歪曲線とがよく近似できるように分岐方程式のパラメータを決め(図-5)、初期不整を算定した。標本の応力比-軸歪曲線に原点補正を施し1/3乗則を適用すると、図-6に見るように明らかな線形関係が得られた。また、図-7に交点における接線の傾きと初期不整の1/3乗との関係を示した。図-8では、初期不整の2乗の値のヒストグラムと理論的に得られる確率密度関数を、図-9では、最大応力の

ヒストグラムと半経験的に求めた確率密度関数を比較している。共に、ヒストグラムと確率密度関数は比較よく一致しており、理論の妥当性を示している。

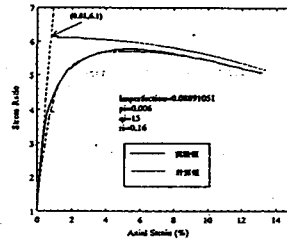


図-5 応力比-軸歪曲線

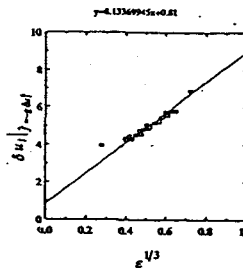


図-6 $e^{1/3} - \delta u_1 / (1 - \delta u_1)$ 関係 ($g = 0.036$)

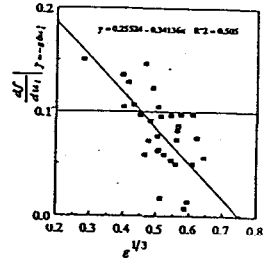


図-7 $e^{1/3} - \frac{df}{du_1} \Big|_{f=\delta u_1}$ 関係 ($g = 0.036$)

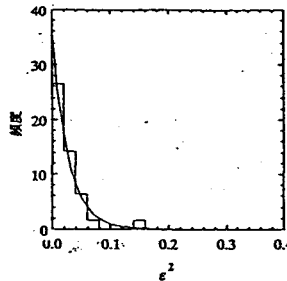


図-8 初期不整の2乗の確率密度関数 (32本)

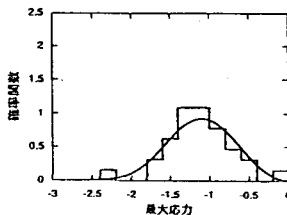


図-9 砂の三軸圧縮体の最大応力の確率密度関数