I －25

不均一な材料の挙動の一評価

東北大学　学生員　○小山　茂
東京大学　正　員　　堀　宗朗
東北大学　正　員　　岩熊哲夫

1.　まえがき

土木材料は一見すると均一であるかのように見えるものが多いが，微視的な観察を行うと明らかなように，地盤材料であれば空隙の存在・非球形粒の向きのばらつき，鋼であれば結晶粒の向きのばらつき，コンクリートであれば骨材・クラックの存在等，実際にはほとんどの材料が不均一であると考えてよい．一方，土木構造解析において第一に必要とされる情報は，巨視的な力学的挙動である．ところが，これは先に述べたような，材料を構成する各微小要素の微視的な挙動の結果として得られるものである．そこでここでは，不均一性や内部の構造を考慮した材料特性の解析を目的とし，材料内部の微視的挙動の把握，巨視的挙動の評価を行う．

2.　基礎式

解析対象の一例として，図−1 に示したような不均一な材料を考える．簡単のために，物体力は無いものとし，表面 S_t 上で表面力 t_0，表面 S_u 上で変位 u_0 が与えられているものとする．また，C^M は母材の弾性定数，C^{I_i} は介在物の弾性定数であり，場所によっては異なった材料が存在するために，材料の弾性定数 C は場所の関数 $C = C(\boldsymbol{x})$ となることに注意する．

連続体理論によれば，

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = C_{ijkl}(\boldsymbol{x})\,\epsilon_{kl}(\boldsymbol{x}) \qquad (1)$$

$$\sigma_{ij,i}(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad (2)$$

$$\epsilon_{ij}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(\boldsymbol{x}) + u_{j,i}(\boldsymbol{x})) \qquad (3)$$

が材料の挙動を知るために必要な式である．ここで各式はそれぞれ，構成則，つり合い式，変位 - ひずみ関係を表す．しかし，ここではこれらの式を直接には解かずに，等価介在物法[1)]を用いた解析を行う．すなわち，不均一な材料を弾性定数 C^0 の単一材料に置き換える一方で，介在物部分には残留応力のようなもの $\sigma^*_{ij}(\boldsymbol{x})$ を分布させる．ここで，$\sigma^*_{ij}(\boldsymbol{x})$ はアイゲン応力と呼ばれ，介在物内部の応力が変わらないように決めなければならない未知量である．すると，式 (1) 式 (2) はそれぞれ次のように書き改められる．

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = C^0_{ijkl}\,\epsilon_{kl}(\boldsymbol{x}) + \sigma^*_{ij}(\boldsymbol{x}) \qquad (4)$$

$$C^0_{ijkl}\,\epsilon_{kl,i}(\boldsymbol{x}) + \sigma^*_{ij,i}(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad (5)$$

不均一な材料を単一材料に置き換えることの利点は，つり合い式の解が比較的容易に求められることである．つまり，均一体の影響線を用いることにより，式 (5) の解が

$$u_k(\boldsymbol{x}) = \int G_{km,l}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\,\sigma^*_{ml}(\boldsymbol{x}')\,d\boldsymbol{x}' \qquad (6)$$

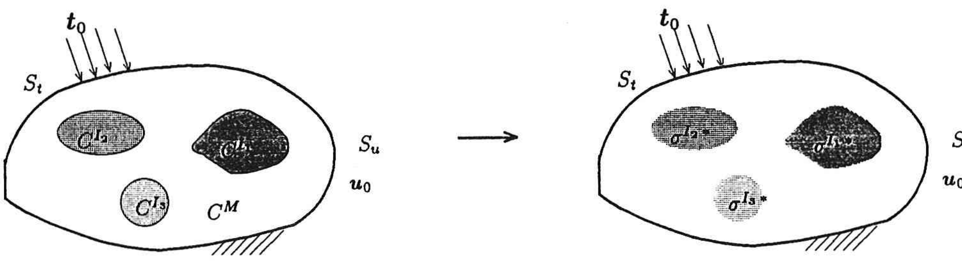
と表わせられる．ここで，$G_{km}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ が影響線であり，点 $\boldsymbol{x}'$ の x_m 方向に単位の荷重が作用したときの点 $\boldsymbol{x}$ における x_k 方向の変位を表し，

$$C^0_{ijkl}\,G_{km,li}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') + \delta_{jm}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = 0$$

を満足する．したがって，式 (3) 式 (4) 式 (6) が基礎式となり，材料内部の挙動は $\sigma^*_{ij}(\boldsymbol{x})$ によって表されることが分かる．また，未知数である $\sigma^*_{ij}(\boldsymbol{x})$ は，介在物のある場所での応力の等価性により，式 (1) 式 (4) から

$$(C(\boldsymbol{x})_{ijkl} - C^0_{ijkl})^{-1}\,\sigma^*_{kl}(\boldsymbol{x}) - \epsilon^d_{ij}(\boldsymbol{x}) - \epsilon^0_{ij} = 0 \qquad (7)$$

によって求めることができる．ここで，ϵ^0_{ij} は表面での平均ひずみであり，$\epsilon^d_{ij}(\boldsymbol{x})$ は $\epsilon^d_{ij}(\boldsymbol{x}) = \epsilon_{ij}(\boldsymbol{x}) - \epsilon^0_{ij}$ によって定義される．



図−1 等価介在物置換

式 (7) を $\sigma^*_{ij}(x)$ について解くことにより，不均一な材料の挙動を解析することができることを示したが，具体的には数値計算によって $\sigma^*_{ij}(x)$ を求める．Hashin & Shtrikman[2] は以下に示す汎関数 $I(s^*_{ij}(x);\epsilon^0_{ij})$ の第一変分が式 (7) になること，つまり，$s^*_{ij}(x)=\sigma^*_{ij}(x)$ となるときに $I(s^*_{ij}(x);\epsilon^0_{ij})$ が停留するということを導いた．

$$I(s^*_{ij}(x);\epsilon^0_{ij})=\frac{1}{2}\int\epsilon^0_{ij}C^0_{ijkl}\epsilon^0_{kl}dV-\frac{1}{2}\int s^*_{ij}(x)\{(C_{ijkl}(x)-C^0_{ijkl})^{-1}s^*_{kl}(x)-\epsilon^d_{ij}(x)-2\epsilon^0_{ij}\}dV$$
$$u^d_i=0\ \ on\ \ S_u\qquad n_i\sigma^d_{ij}=0\ \ on\ \ S_t \qquad\cdots(8)$$

本方法では，この $I(s^*_{ij}(x);\epsilon^0_{ij})$ を汎関数とした有限要素解析を行い $\sigma^*_{ij}(x)$ を求める．

3. 平均弾性の評価

汎関数 $I(s^*_{ij}(x);\epsilon^0_{ij})$ の停留値は，物体に蓄えられるひずみエネルギー U に等しくなり，$-(C_{ijkl}(x)-C^0_{ijkl})$ が正値形式ならばその停留値は最小値，$(C_{ijkl}(x)-C^0_{ijkl})$ が正値形式ならばその停留値は最大値となるという性質がある．数値計算によって求められる $\sigma^*_{ij}(x)$ はあくまでも近似的なものにすぎないから，$(C_{ijkl}(x)-C^0_{ijkl})$ が正値形式，$-(C_{ijkl}(x)-C^0_{ijkl})$ が正値形式であるときの数値計算によって得られる $\sigma^*_{ij}(x)$ をそれぞれ $\sigma^*_{ij\,R>0}(x)$，$\sigma^*_{ij\,R<0}(x)$ とすると

$$I(\sigma^*_{ij\,R>0}(x);\epsilon^0_{ij})<U<I(\sigma^*_{ij\,R<0}(x);\epsilon^0_{ij})\ \cdots\cdots(9)$$

の関係が常に成立しなければならない．式 (9) から明らかなように，$I(\sigma^*_{ij\,R<0}(x);\epsilon^0_{ij})$，$I(\sigma^*_{ij\,R>0}(x);\epsilon^0_{ij})$ がそれぞれ物体に蓄えられるひずみエネルギーの上界下界となることがわかる．本方法では，C^0_{ijkl} を変化させて計算を行い，物体に蓄えられるひずみエネルギーの上界下界が最良となるような C^0_{ijkl} を平均弾性の上界下界として，不均一な材料の平均弾性の評価を行う．

4. おわりに

本方法による計算結果は，発表当日に示す．

参考文献

1) Mura, T. : *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publ,1982.
2) Hashin, Z. and Shtrikman, S. : On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.10, pp.335–342, 1962.