

I - 14

境界積分方程式法による円筒形シェルの応力解析

岩手大学工学部 正員 ○ 岩崎正二 出戸秀明 宮本 裕
岩手大学工学部 呂 杰

1. まえがき

著者らは、有限帯板法の考え方と境界積分方程式の手法を組合わせた解法である境界帯板法により、長方形板の応力解析を試みてきた¹⁾。本論文は、この境界帯板法の考え方を薄肉円筒形シェルの応力解析に応用したものである。本手法では、たわみの変位関数として一方向の境界条件を満足する級数解を用いて円筒形シェルの支配微分方程式を一次元問題に還元し、残りの方向に対して境界積分方程式法に基づく定式化を行うものである。この解法は、古典的な級数解法より境界条件の取扱いに汎用性があり、境界条件や荷重条件に関らず8元の連立方程式を扱うだけでよく、小型計算機に適した解法である。

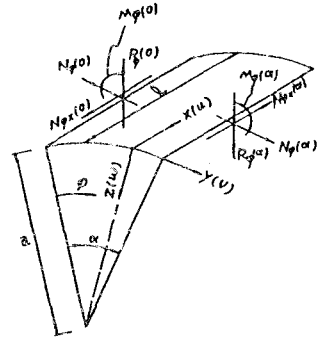


図-1. 力と変位

2. 解析理論

図-1に示すような円筒形シェルの基礎方程式は、Donnellの理論に従うと変位を用いて次式のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} a C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a C \nu \left(\frac{1}{a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{C(1-\nu)}{2} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} \right) &= a P_x \\ C \left(\frac{1}{a} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} \right) + \frac{a C(1-\nu)}{2} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) &= a P_y \\ - \frac{2 D(1-\nu)}{a} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial \varphi} - a D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\nu}{a^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} \right) - \frac{D}{a} \left(\frac{1}{a^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right. \\ &\quad \left. + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} \right) + C \left(\frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{a} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = a P_z \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 a は円筒シェルの半径。 u, v, w はシェルの母線、接線、半径方向の変位、 P_x, P_y, P_z は単位面積当たりの母線、接線、半径方向の分布力を表す。 C, D はそれぞれひずみ剛度、曲げ剛度を表す。変位 u, v, w を、それぞれ次式のように母線方向に級数展開する。

$$u(x, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\varphi) \cos \frac{n\pi}{\ell} x, \quad v(x, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\varphi) \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad w(x, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\varphi) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad (2)$$

ただし、 P_x, P_y, P_z もそれぞれ同様に級数展開する。

式(2)を式(1)に代入すると、式(3)が得られる。

$$\left. \begin{aligned} -a C \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 u_n + \frac{C(1-\nu)}{2a} \frac{\partial^2 u_n}{\partial \varphi^2} + \frac{C(1+\nu)}{2} \left(\frac{n\pi}{\ell} \right) \frac{\partial v_n}{\partial \varphi} - \nu C \left(\frac{n\pi}{\ell} \right) w_n &= a P_{xn} \\ - \frac{C(1+\nu)}{2} \left(\frac{n\pi}{\ell} \right) \frac{\partial u_n}{\partial \varphi} - \frac{a C(1-\nu)}{2} \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 v_n + \frac{C}{a} \frac{\partial^2 v_n}{\partial \varphi^2} - \frac{C}{a} \frac{\partial w_n}{\partial \varphi} &= a P_{yn} \\ - \nu C \left(\frac{n\pi}{\ell} \right) u_n + \frac{C}{a} \frac{\partial v_n}{\partial \varphi} + \frac{2D}{a} \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 \frac{\partial^2 w_n}{\partial \varphi^2} - a D \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^4 w_n - \frac{D}{a^3} \frac{\partial^4 w_n}{\partial \varphi^4} \\ &\quad - \frac{C}{a} w_n = a P_{zn} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式(3)の各式にそれぞれ基本解 u^*, v^*, w^* を乗じて、接線方向に部分積分を行い、最後にそれらの式を足し合わせると次式が得られる。式中の境界量は図-1に示すとおりである。

$$\begin{aligned} & \left[N \varphi x n \cdot u^*(\varphi, \varphi') + N \varphi n \cdot v^*(\varphi, \varphi') + R \varphi n \cdot w^*(\varphi, \varphi') - \frac{1}{a} M \varphi n \frac{\partial w^*}{\partial \varphi} \right. \\ & \quad \left. - N^* \varphi x n \cdot u_n(\varphi) - N^* \varphi n \cdot v_n(\varphi) - R^* \varphi n \cdot w_n(\varphi) + \frac{M^* \varphi n}{a} \frac{\partial w_n(\varphi)}{\partial \varphi} \right] \alpha \\ & + \int_0^\alpha u_n(\varphi) \left\{ -a C \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 u^* + \frac{C(1-\nu)}{2a} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2} + \frac{C(1+\nu)}{2} \left(\frac{n\pi}{\ell} \right) \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} - \nu C \left(\frac{n\pi}{\ell} \right) w^* \right\} d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\alpha} v_n(\varphi) \left\{ -\frac{C(1+\nu)}{2} \left(\frac{n\pi}{l} \right) \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} - \frac{aC(1-\nu)}{2} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 v^* + \frac{C}{a} \frac{\partial^2 v^*}{\partial \varphi^2} - \frac{C}{a} \frac{\partial w^*}{\partial \varphi} \right\} d\varphi \\
& + \int_0^{\alpha} w_n(\varphi) \left\{ -C\nu \left(\frac{n\pi}{l} \right) u^* + \frac{C}{a} \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} - \frac{C}{a} w^* - aD \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 w + \frac{2D}{a} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial \varphi^2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{D}{a^3} \frac{\partial^4 w^*}{\partial \varphi^4} \right\} d\varphi + \int_0^{\alpha} a P_{xn} u^* d\varphi + \int_0^{\alpha} a P_{yn} v^* d\varphi + \int_0^{\alpha} a P_{zn} w^* d\varphi = 0 \quad (4)
\end{aligned}$$

ここで、基本解 u^* 、 v^* 、 w^* は次式を満足する解である

$$\begin{aligned}
& -aC \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 u^* + \frac{C(1-\nu)}{2a} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2} + \frac{C(1+\nu)}{2} \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} - \nu C \left(\frac{n\pi}{l} \right) w^* = -X' \cdot \delta \\
& -\frac{C(1+\nu)}{2} \left(\frac{n\pi}{l} \right) \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} - \frac{aC(1-\nu)}{2} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 v^* + \frac{C}{a} \frac{\partial^2 v^*}{\partial \varphi^2} - \frac{C}{a} \frac{\partial w^*}{\partial \varphi} = -Y' \cdot \delta \\
& -C\nu \left(\frac{n\pi}{l} \right) u^* + \frac{C}{a} \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} - \frac{C}{a} w^* - aD \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 w^* + \frac{2D}{a} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial \varphi^2} - \frac{D}{a^3} \frac{\partial^4 w^*}{\partial \varphi^4} = -Z' \cdot \delta
\end{aligned} \quad (5)$$

ただし $\delta(\varphi, \varphi')$ はデルタ関数を表す。ここで、

$$\left. \begin{aligned} X' &= 1, Y' = 0, Z' = 0 \\ X' &= 0, Y' = 1, Z' = 0 \\ X' &= 0, Y' = 0, Z' = 1 \end{aligned} \right\} \text{の場合の基本解を} \left\{ \begin{aligned} u^{*(1)}, v^{*(1)}, w^{*(1)} \\ u^{*(2)}, v^{*(2)}, w^{*(2)} \\ u^{*(3)}, v^{*(3)}, w^{*(3)} \end{aligned} \right\} \text{で表すと、式(5)は次式のようになる。}$$

$$\begin{aligned}
u^{(i)}(\varphi') &= \left[N\varphi_{xn}(\varphi) u^{*(i)}(\varphi, \varphi') + N\varphi_n(\varphi) v^{*(i)}(\varphi, \varphi') + R\varphi_n(\varphi) w^{*(i)}(\varphi, \varphi') \right. \\
& \quad - \frac{1}{a} M\varphi_n(\varphi) \frac{w^{*(i)}(\varphi, \varphi')}{\partial \varphi} - N^* \varphi_{xn}^{(i)}(\varphi, \varphi') u_n(\varphi) - N^* \varphi_n^{(i)}(\varphi, \varphi') v_n(\varphi) \\
& \quad \left. - R^* \varphi_n^{(i)}(\varphi, \varphi') w_n(\varphi) + \frac{1}{a} M^* \varphi_n^{(i)}(\varphi, \varphi') \frac{\partial w_n(\varphi)}{\partial \varphi} \right] \alpha \\
& + \int_0^{\alpha} a P_{xn} u^{*(i)} d\varphi + \int_0^{\alpha} a P_{yn} v^{*(i)} d\varphi + \int_0^{\alpha} a P_{zn} w^{*(i)} d\varphi \quad (i=1, 2, 3) \quad (6)
\end{aligned}$$

ここで、 $u^{(1)}(\varphi') = u_n(\varphi')$ 、 $u^{(2)}(\varphi') = v_n(\varphi')$ 、 $u^{(3)}(\varphi') = w_n(\varphi')$ 、また回転角 $\phi_n(\varphi')$ は次式のようになる。

$$\phi_n(\varphi') = \frac{\partial w_n(\varphi')}{\partial \varphi'} \quad (7)$$

式(6)、(7)において $\varphi' \rightarrow 0 + \varepsilon$ 、 $\varphi' \rightarrow \alpha - \varepsilon$ (ε は微小な正定数)とした時の $\varepsilon \rightarrow 0$ 極限を考えることにより、8本の境界量方程式が得られる。これらをマトリクス表示すると次式のようになる。

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} u_n(0) \\ u_n(\alpha) \\ v_n(0) \\ v_n(\alpha) \\ w_n(0) \\ w_n(\alpha) \\ a\psi_n(0) \\ a\psi_n(\alpha) \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{18} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{81} & K_{82} & \cdots & K_{88} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N\varphi_{xn}(\alpha) \\ N\varphi_n(\alpha) \\ R\varphi_n(\alpha) \\ M\varphi_n(\alpha) \\ u_n(\alpha) \\ v_n(\alpha) \\ w_n(\alpha) \\ \psi_n(\alpha) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{18} \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{81} & L_{82} & \cdots & L_{88} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N\varphi_{xn}(0) \\ N\varphi_n(0) \\ R\varphi_n(0) \\ M\varphi_n(0) \\ u_n(0) \\ v_n(0) \\ w_n(0) \\ \psi_n(0) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \\ H_7 \\ H_8 \end{Bmatrix} \\
& \quad (n=1, 2, 3, \dots)
\end{aligned}$$

これらの式の16個の境界未知量のうち8個については両端境界条件より定まり、残り8個の未知量は8行8列のマトリクス方程式を解くことにより求めることができる。ただし、 K_{ij} 、 L_{ij} 、 H_j ($i, j=1 \sim 8$)の内容については省略する。

3. あとがき

本論文では紙面の都合上、公式の誘導過程についてのみ述べた。本手法では母線方向に級数展開を行い、接線方向に境界積分方程式法を適用したが、接線方向を級数展開し、母線方向に境界積分方程式法を用いた定式化も可能であり今後の検討課題としたい。

参考文献

- 1) 出戸秀明他：境界積分方程式法による矩形平板の曲げ応力解析 土木学会第47回年次学術講演会、I-372、1992