I －13

境界帯板法による薄肉立体構造物の応力解析

岩手大学工学部　学生員　○玉内秀佳
正　員　岩崎正二
正　員　宮本　裕
正　員　出戸秀明

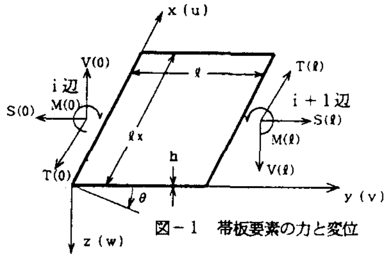
1．はじめに

本論文は，有限帯板法の考え方と境界積分方程式法の手法を組み合わせた解法である境界帯板法による薄肉立体構造物の応力解析を試みたものである。著者らはこれまでに，直交異方性帯板要素の面内および面外変形に関する境界帯板公式を誘導し応力解析を行っている[1),2)]。この誘導した帯板公式と還元法を組み合わせる手法により，マトリックスの容量を増やすことなく，面内面外両作用が共存するような薄肉立体構造物の応力解析ができることを示すとともに，有限帯板法など他の手法と比較することにより本手法が工学上十分な精度を有することを示した。

2．解析理論

数枚の帯板要素からなる薄肉立体構造物を境界帯板法で解析する場合，図－１に示すように１枚の帯板要素は面内変形と面外曲げ変形の作用を同時に受けるので，面内および面外変形に関する境界量方程式を結合する必要がある。いま，上述の文献[1),2)]から，面内および面外変形に関する帯板要素の境界量方程式を取り出し組み合わせると，次のような帯板要素の左右辺の境界量の関係を表す伝達マトリックス方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix}\delta in_{ni}\\ \delta ex_{ni}\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}Ain_n & 0\\ 0 & Aex_n\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}Bin_n & 0\\ 0 & Bex_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta in_{n(i+1)}\\ \delta ex_{n(i+1)}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}Ain_n & 0\\ 0 & Aex_n\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}Hin_n\\ Hex_n\end{bmatrix} \qquad (1)$$



図－１　帯板要素の力と変位

ここで

$$[Ain_n]=\begin{bmatrix} u_n^{*(1)}(0,0) & v_n^{*(1)}(0,0) & -T_n^{*(1)}(0,0)-h & -S_n^{*(1)}(0,0)\\ u_n^{*(1)}(0,\ell) & v_n^{*(1)}(0,\ell) & -T_n^{*(1)}(0,\ell) & -S_n^{*(1)}(0,\ell)\\ u_n^{*(2)}(0,0) & v_n^{*(2)}(0,0) & -T_n^{*(2)}(0,0) & -S_n^{*(2)}(0,0)-h\\ u_n^{*(2)}(0,\ell) & v_n^{*(2)}(0,\ell) & -T_n^{*(2)}(0,\ell) & -S_n^{*(2)}(0,\ell)\end{bmatrix}$$

$$[Bin_n]=\begin{bmatrix} -u_n^{*(1)}(\ell,0) & -v_n^{*(1)}(\ell,0) & T_n^{*(1)}(\ell,0) & S_n^{*(1)}(\ell,0)\\ -u_n^{*(1)}(\ell,\ell) & -v_n^{*(1)}(\ell,\ell) & T_n^{*(1)}(\ell,\ell)-h & S_n^{*(1)}(\ell,\ell)\\ -u_n^{*(2)}(\ell,0) & -v_n^{*(2)}(\ell,0) & T_n^{*(2)}(\ell,0) & S_n^{*(2)}(\ell,0)\\ -u_n^{*(2)}(\ell,\ell) & -v_n^{*(2)}(\ell,\ell) & T_n^{*(2)}(\ell,\ell) & S_n^{*(2)}(\ell,\ell)-h\end{bmatrix}$$

$$[Aex_n]=\begin{bmatrix} w_n^*(0,0) & -\theta_n^*(0,0) & -V_n^*(0,0)+Q_n & M_n^*(0,0)\\ w_n^*(0,\ell) & -\theta_n^*(0,\ell) & -V_n^*(0,\ell) & M_n^*(0,\ell)\\ \widetilde{w}_n^*(0,0) & -\widetilde{\theta}_n^*(0,0) & -\widetilde{V}_n^*(0,0) & \widetilde{M}_n^*(0,0)+Q_n\\ \widetilde{w}_n^*(0,\ell) & -\widetilde{\theta}_n^*(0,\ell) & -\widetilde{V}_n^*(0,\ell) & \widetilde{M}_n^*(0,\ell)\end{bmatrix}$$

$$[Bex_n]=\begin{bmatrix} -w_n^*(\ell,0) & \theta_n^*(\ell,0) & V_n^*(\ell,0) & -M_n^*(\ell,0)\\ -w_n^*(\ell,\ell) & \theta_n^*(\ell,\ell) & V_n^*(\ell,\ell)-Q_n & -M_n^*(\ell,\ell)\\ -\widetilde{w}_n^*(\ell,0) & \widetilde{\theta}_n^*(\ell,0) & \widetilde{V}_n^*(\ell,0) & -\widetilde{M}_n^*(\ell,0)\\ -\widetilde{w}_n^*(\ell,\ell) & \widetilde{\theta}_n^*(\ell,\ell) & \widetilde{V}_n^*(\ell,\ell) & -\widetilde{M}_n^*(\ell,\ell)-Q_n\end{bmatrix}$$

$$[Hin_n]=\begin{bmatrix} h\int_0^\ell X_n(y)u_n^{*(1)}(y,0)dy+h\int_0^\ell Y_n(y)v_n^{*(1)}(y,0)dy\\ h\int_0^\ell X_n(y)u_n^{*(1)}(y,\ell)dy+h\int_0^\ell Y_n(y)v_n^{*(1)}(y,\ell)dy\\ h\int_0^\ell X_n(y)u_n^{*(2)}(y,0)dy+h\int_0^\ell Y_n(y)v_n^{*(2)}(y,0)dy\\ h\int_0^\ell X_n(y)u_n^{*(2)}(y,0)dy+h\int_0^\ell Y_n(y)v_n^{*(2)}(y,0)dy\end{bmatrix} \qquad [Hex_n]=\begin{bmatrix} \int_0^\ell q(y)Q_n w_n^*(y,0)dy\\ \int_0^\ell q(y)Q_n w_n^*(y,\ell)dy\\ \int_0^\ell q(y)Q_n \widetilde{w}_n^*(y,0)dy\\ \int_0^\ell q(y)Q_n \widetilde{w}_n^*(y,\ell)dy\end{bmatrix}$$

$[\delta in_{ni}] = [T_n(0), S_n(0), u_n(0), v_n(0)]^T$，$[\delta ex_{ni}] = [V_n(0), M_n(0), w_n(0), \theta_n(0)]^T$

$[\delta in_{n(i+1)}] = [T_n(\ell), S_n(\ell), u_n(\ell), v_n(\ell)]^T$，$[\delta ex_{n(i+1)}] = [V_n(\ell), M_n(\ell), w_n(\ell), \theta_n(\ell)]^T$

$[\delta_{ni}] = [\delta in_{ni}, \delta ex_{ni}]^T$，$[\delta_{n(i+1)}] = [\delta in_{n i+1}, \delta ex_{n(i+1)}]^T$

また，$u_n^*, v_n^*, w_n^*, \theta_n^*, T_n^*, S_n^*, V_n^*, M_n^*$は，文献[1),2)]に示すように変位と力の基本解である。

式(1)を簡単に表すと

$$[\delta_{ni}] = -[a_n]^{-1}[b_n][\delta_{n(i+1)}] + [a_n]^{-1}[H_n] \qquad (2)$$

式(2)を座標変換マトリックス[r]を用いて全体座標系に変換すると

$$[\overline{\delta_{ni}}] = [c_n][\overline{\delta_{n(i+1)}}] + [f_n] \qquad (3)$$

ここで，$[\delta_{ni}] = [r][\overline{\delta_{ni}}]$，$[c_n] = -[r]^T[a_n]^{-1}[b_n][r]$，$[f_n] = [r]^T[a_n]^{-1}[H_n]$

式(3)をさらに整理すると次式のような伝達マトリックス方程式が得られる。

$$[\Delta_{ni}] = [C_n][\Delta_{n(i+1)}] \qquad (4)$$

ただし，

$$[\Delta_{ni}] = \begin{bmatrix} \overline{\delta_{ni}} \\ 1 \end{bmatrix},\quad [\Delta_{n(i+1)}] = \begin{bmatrix} \overline{\delta_{n(i+1)}} \\ 1 \end{bmatrix},\quad [C_n] = \begin{bmatrix} c_{n11} & \cdots & c_{n18} & f_{n1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{n81} & \cdots & c_{n88} & f_{n8} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

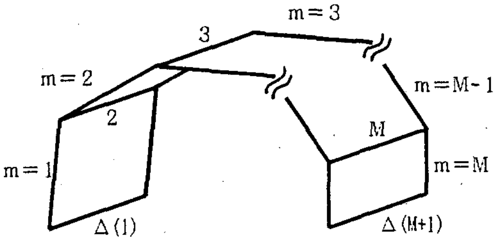
従って，式(4)を図－2に示すような要素数Mの薄肉立体構造物の解析に繰り返し適用すると最終的には次式が得られる。

$$[\Delta_{n1}] = [K_{nM}][\Delta_{n(M+1)}]$$

$$(n=1, 2, \cdots)$$

ここで，

$$[K_{nM}] = [C_{n1}]\cdots[C_{nM}]$$



図－2　要素数Mの薄肉構造物

3．数値計算例

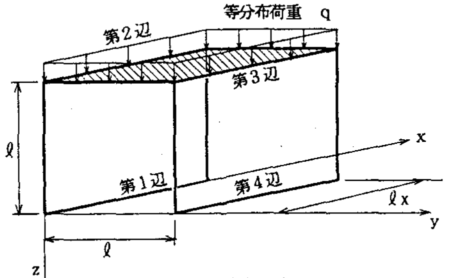
図－3に示すような，両端($x=0, \ell$)が単純支持された3枚の帯板要素からなる折板断面部材の中央帯板要素に等分布荷重qが作用する場合の計算を行った。出発端(第1辺)と到達端(第4辺)の境界条件は単純支持とし，以下のようにおいた。

$$T(1) = T(4) = 0,\quad v(1) = v(4) = 0,$$
$$M(1) = M(4) = 0,\quad w(1) = w(4) = 0.$$

比較対象辺を第3辺とし，変位について有限帯板法(分割数12)と比較した結果は表－1のようになった。なお，計算に用いた数値は以下のとおりである。

$\ell = \ell x = 100$[cm]，$E = 2.1\times10^6$[kgf/cm^2]，

$\nu = 0.3$，$q = 1.0$[kgf/cm^2]，$h = 10.0$[cm]



図－3　計算モデル

表－1　計算結果(変位)

	BSM(n=5)	FSM(n=5)	FSM(n=50)
v[cm]	-0.19762D-04	-0.20177D-04	-0.20195D-04
w[cm]	0.13987D-03	0.13547D-03	0.13528D-03
θ	-0.31252D-04	-0.33707D-04	-0.33720D-04

参考文献

1）出戸秀明，岩崎正二，渡辺文武：境界積分方程式法による矩形平板の応力解析，平成3年度土木学会東北支部技術研究発表会概要集，Ⅰ-18, pp. 36-37

2）出戸秀明，岩崎正二，宮本 裕ほか：境界帯板法による矩形平板の面内応力解析，平成4年度土木学会東北支部技術研究発表会概要集，Ⅰ-28, pp. 56-57