I －10

弾性矩形板の二次座屈現象に関する研究

東北大学工学部　○学生員　和知　聡
東北大学工学部　正　員　中沢正利
東北大学工学部　正　員　倉西　茂
東北大学工学部　正　員　池田清宏

1.　はじめに

初期たわみのない弾性平板の初期座屈は安定対称分岐としてよく知られているが、それ以降の後座屈現象は有限変位理論を適用しなければならない高次の非線形問題となるためにあまり考察がなされていない。たとえば、一様圧縮を受ける矩形板に関するいくつかの研究があるが、曲げあるいはせん断を受ける弾性平板の後座屈挙動についてはほとんど報告されていない。そこで本研究の目的は、後座屈領域での二次座屈不安定現象を追跡し、そのメカニズムを数値的に明らかにすることにある。基礎方程式には初期たわみをも含む有限変位に関するMarguerreの式を採用し、その解析には準解析的手法であるGalerkin法を用いた。これによって求められたつり合い曲線上の座屈点を、解の唯一性という観点から半谷らが提案した分類法を用いて数値的に分類を行うものである。

2.　基礎方程式

板の有限変位に関するMarguerreの基礎微分方程式は面外たわみ $w(x,y)$ 、初期たわみ $w_0(x,y)$ 、およびAiryの応力関数 $F(x,y)$ によって次のように表される。

$$\nabla^4 w = \frac{t}{D}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x \partial y}\right] \quad \cdots\cdots (1\text{-a})$$

$$\nabla^4 F = E\left\{\left[\frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x\partial y}\right]^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x^2}\frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial y^2}\frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x^2}\right] - \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right]\right\} \quad \cdots\cdots (1\text{-b})$$

ここで、t : 板厚、D : 曲げ剛性 $(\equiv Et^3/12(1-\nu))$ 、E : 弾性係数、ν : ポアソン比である。本研究では面内等曲げ状態の四辺単純支持弾性矩形板のモデルを用い、その幾何学的境界条件より面外たわみ形を

$$w_0 = t\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad \cdots\cdots (2\text{-a})$$

$$w = t\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad \cdots\cdots (2\text{-b})$$

のように仮定した。

3.　解析方法

式(1)を直接解くことは困難であることが予想されるためGalerkin法を適用し、最終的に以下の形に表される三次代数方程式を得る。

$$\{f_{rs}(b_{11}, b_{12}, \ldots, \lambda)\} = \{0\}, \qquad r, = 1,2,\ldots, \quad s = 1,2,\ldots. \quad \cdots\cdots (3)$$

ここで、λ は荷重パラメータである。上式の数値計算には荷重増分型および変位増分型のNewton-Raphson法を用いる。この時荷重制御法によるものは変位増分 $\{\Delta b_{ij}\}$ を未知数として選び、また、変位制御法によるものはある変位増分 $\Delta b_{k\ell}$ に注目しこれを既知として与え、これ以外の変位増分 $\{\Delta b_{ij}\}$ と荷重パラメータ増分 $\Delta\lambda$ を未知数として選ぶ。荷重制御法および変位制御法におけるNewton-Raphson法の係数行列をそれぞれ $[K_{rs,ij}], [K_\lambda]$ とし、これらの係数行列のDeterminantを用いて、解の唯一性という観点から半谷らの分類(表−1)に従い座屈点を数値的に分類をする[2),3)]。

4.　結果および考察

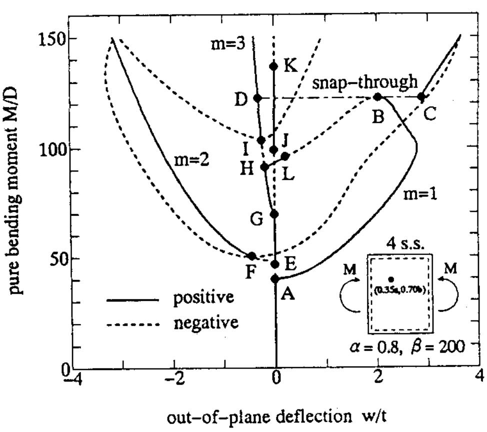
本研究で対象としている矩形板は縦横比 $\alpha(\equiv a/b) = 0.8$、板厚比 $\beta(\equiv b/t) = 200$ である。また、弾性係数 $E = 206GN/m^2$、ポアソン比 $\nu = 0.3$ である。荷重制御および変位制御により求まるつり合い曲線をそれぞれ図−1,2に示す。両図は面外たわみの評価点を $(0.35a, 0.70b)$ に選び、それぞれの方法により用いられる係数行列の Determinant に対して正値を実線に、負値を破線としてプロットしたものである。

表−1　座屈点の分類

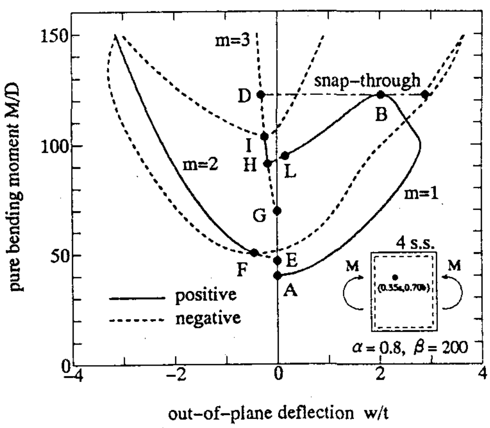
	$\|K_{rs,ij}\|$	$\|K_\lambda\|$
つり合い点	$\neq 0$	$\neq 0$
飛び移り座屈点	$= 0$	$\neq 0$
分岐点	$= 0$	$= 0$

モード $m = 1$ の初期座屈点である A 点からの経路は、B 点で2次不安定現象である飛び移りが生じ、モードの異なる D 点へと至る。つまりこの B 点はつり合い経路の極限点であり、この荷重レベル以降ではエネルギー的にモードが $m = 3$ であるつり合い経路の方が低いと考えられる。しかし、この B 点から不安定な $m = 3$ への経路が存在するはずで、この経路が $B - L - H$ となる。この経路では B 点を境に荷重制御型係数行列の Determinant が正値から負値へと変化する。表−1に従えばこの B 点は飛び移り座屈点となる。また、両 Determinant が正値から負値へもしくは負値から正値へと変わる特異点が存在することがわかる。表−1にまとめたようにこれらの点は分岐座屈点であり、その分岐座屈点である条件を満足する点は点 F,I,L である。実際に点 F,I については分岐経路が図の様に求まり、その分岐点後の経路では系の対称性は崩れている。

なお、ここでの議論は座屈点の分類のみに着目し、つり合い経路の安定性への考察はしていない。



図−1　荷重制御法により求められるつり合い曲線



図−2　変位制御法により求められるつり合い曲線

5.　おわりに

荷重制御法および変位制御法の両解析方法によって、本解析モデルにおけるつり合い経路上の座屈点の分類を示した。求められたつり合い経路などを観察し現象論的に座屈点を評価するという従来の我々の研究に加え、この手法は数学的根拠に基づいた座屈点の分類を行った。よって、この手法により四辺単純支持の弾性平板の後座屈挙動のメカニズム、とりわけ座屈点が明らかにされた。また、他の境界条件の弾性平板に対しても同様に、本解析手法の適用により後座屈挙動の解明が可能である。

参考文献

1) Nakazawa,M.,Iwakuma,T.,Kuranishi,S. and Hidaka,M.: Instability phenomena of a rectangular elastic plate under bending and shear, *Int.J.Solids Structures*,Vol.30,No.20,pp.2729-2741,1993.
2) Hangai,Y. and Kawamata,S.: Analysis of geometrically nonlinear and stability problems by static perturbation method, *Report of the Institute of Industrial Science*, The University of Tokyo,Vol.22,No.5,Jan.1973.
3) 日本鋼構造協会・成岡昌夫・中村恒善共編: 骨組構造解析法要覧、培風館、pp.91-117,1976.