I − 7

境界および荷重条件を統一的に考慮した矩形板の曲げ解析に関する研究

東北大学工学部　○正　員　中沢　正利
東北大学工学部　正　員　倉西　茂
木更津工業高等専門学校　正　員　佐藤　恒明

1.　まえがき

横荷重を受ける矩形板の曲げ解析において，支配微分方程式から出発する解法では，板の境界条件ごとに異なる変位関数を仮定するのが一般的であった．しかし，近年の著者らの研究[1)]の様に，板の二次元問題に対する変位関数でも，変数分離型を前提あるいは制約条件とすることにより，一次元的なはりの変位関数をそのまま使用することができて，一般的に自由端以外の境界条件のほとんどを統一的に扱うことが可能である．本報告では，上述のアイデア[1)]を矩形板の曲げ解析にも適用し得ることを理論的に示す．また，一対辺が単純支持の場合には，他対辺が一端単純支持と他端自由，すなわち言い換えると三辺単純支持，一辺自由境界条件の場合には，自由端を含む場合でも曲げ解析が可能なことを数値例とともに示す．

2.　理論の概略

板曲げの支配微分方程式は，たわみを $w(x,y)$，板の曲げ剛性を D，分布荷重項を $q(x,y)$ とすると

$$\nabla^4 w(x,y) = q(x,y)/D \quad \cdots\cdots (1)$$

と表わされる．よって，たわみ $w(x,y)$ は板周辺での境界条件を満足するとともに $\nabla^4 w(x,y) = 0$ の斉次解でもある必要がある．$\nabla^4 w(x,y) = q(x,y)/D$ を満たす特解は荷重の分布形に依存するため，ここでは考えない．この時，$w(x,y) = X(x)\cdot Y(y)$ と変数分離できるためには，たとえば $X'''' = \lambda^4 X$，かつ $X'' = -\lambda^2 X$ の関係があればよいことが知られている[2,3)]．ここで $(\ )' = \partial(\ )/\partial X$ であり，λ はある係数である．これらより，

i) はり・柱の座屈微分方程式

$$X'''' + \lambda^2 X'' = 0, \qquad \therefore X = K\cos\lambda x + L\sin\lambda x + Mx + N \quad \cdots\cdots (2)$$

ii) はりの曲げ自由振動の微分方程式

$$X'''' - \lambda^4 X = 0, \qquad \therefore X = K\cos\lambda x + L\sin\lambda x + M\cosh\lambda x + N\sinh\lambda x \quad \cdots\cdots (3)$$

の関数形が X 方向に関して定義され，また Y に関しては，

$$\ddot{\ddot{Y}} - 2\lambda^2\ddot{Y} + \lambda^4 Y = 0, \qquad \therefore Y = A\cosh\lambda y + B\sinh\lambda y + Cy\cdot\cosh\lambda y + Dy\cdot\sinh\lambda y \quad \cdots\cdots (4)$$

ここで $(\dot{\ }) = \partial(\ )/\partial Y$ である．以上より，x, y 辺での境界条件は各係数 $A \sim D, K \sim N$ を適宜変えることによって表現できる．一般に，自由端以外は x, y 方向独立にこれらの係数が決定できるので，例えば (2) 式ならば，はりの変位関数がそのまま使用できる．また，図-1に示す様に，$x = 0, a$ で単純支持の場合には (2), (3) 式とも $X = L\sin\lambda x$ となり，さらに $y = 0$ で単純支持，$y = b$ で自由端（すなわち，三辺単純支持，一辺自由）の場合にも本手法で解ける．この境界条件を満たす変位関数は (2),(3),(4) の関係より

$$\text{i)}\ w(x,y) = t\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\left[\sin\left(\frac{\alpha_n y}{b}\right) + \xi(m,n)\sinh\left(\frac{\alpha_n y}{b}\right)\right] \quad \cdots\cdots (5)$$

$$\text{ここで，}\quad \xi(m,n) = \frac{(\alpha_n/b)^2 + \nu(m\pi/a)^2}{(\alpha_n/b)^2 - \nu(m\pi/a)^2}\cdot\frac{\sin(\alpha_n)}{\sinh(\alpha_n)}$$

$$\text{ii)}\ w(x,y) = t\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\left[\sin\left(\frac{\beta_n y}{b}\right) - \zeta(m,n)\left(\frac{\beta_n y}{b}\right)\right] \quad \cdots\cdots (6)$$

$$\text{ここで，}\quad \zeta(m,n) = \frac{(\beta_n/b)^2 + \nu(m\pi/a)^2}{\nu(m\pi/a)^2}\cdot\frac{\sin(\beta_n)}{\beta_n}$$

ここで，α_n, β_n は各々の固有関数であり，t は板厚である．この時のひずみエネルギー U および外力仕事 V は

$$U = \frac{D}{2}\int\int\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 - 2(1-\nu)\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right\}\right]dxdy \quad \cdots\cdots (7\text{-a})$$

$$V = -\int\int q(x,y)w(x,y)dxdy \quad \cdots\cdots (7\text{-b})$$

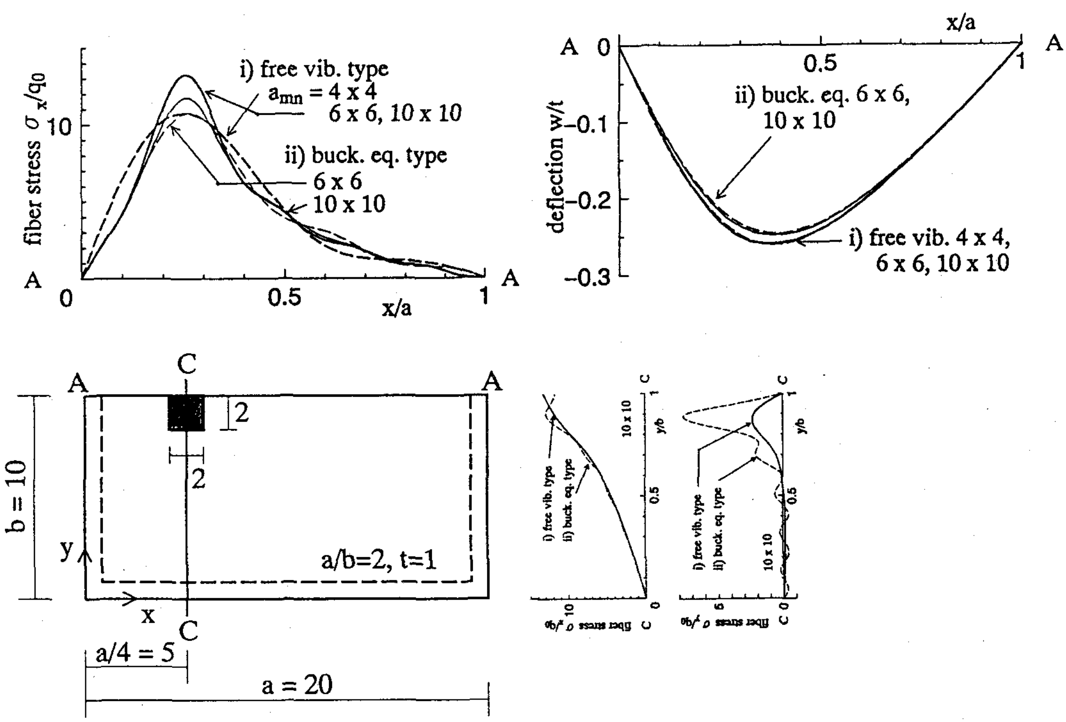
で表わされ，$\partial(U+V)/\partial a_{mn}=0$ より a_{mn} を決定する．外力仕事は荷重項を含む積分となるので，集中荷重，部分分布荷重，満載荷重とも，積分範囲を変えさらに足し合わせることで統一的に考慮できる．この a_{mn} を用いて，(5),(6) 式よりたわみ形が求まり，

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \qquad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \quad \cdots\cdots (8)$$

よりモーメント M_x, M_y が求まり，縁応力は $\sigma = \pm 6M/t^2$ から得られる．

3. 数値例

図-1 には数値例として，縦横比 2.0 の矩形板が部分的な等分布荷重を受ける場合を示す．自由辺 A–A および中間の C–C 断面でのたわみ分布あるいは縁応力分布を求めた．a_{mn} の採用項数と解の精度の関係，i), ii) の関数形による解の比較が図示されている．ここで，q_0 は一様分布荷重強度である．



図−1 板曲げ問題の数値例：縦横比 2.0，三辺単純支持・一辺自由端矩形板

参考文献

1) 中沢・倉西・横幕：種々の境界および荷重条件を統一的に考慮した弾性矩形板の線形座屈解析法，構造工学論文集, Vol.39A, pp.105–114, 1993.3.
2) Timoshenko,S.P. and Woinowsky-Krieger,S.: *Theory of Plates and Shells*, 2nd ed., Chap.6, pp.208–212, McGRAW-HILL, 1959.
3) 成岡・丹羽・山田・白石：構造力学 第III巻（板の力学）, pp.105–108, 丸善, 1970.