

Ⅲ－7 最大散逸原理による地盤材料の構成則の定式化について

東北大学 学生員 ○小林正人
東北大学 正 員 岸野佑次

1. まえがき 地盤の力学解析を行うに当たっては地盤材料の構成則を与えることが必要である。従来、地盤材料の構成則理論に関しては様々な研究がなされているが、金属塑性論と同様に塑性ポテンシャル等に基づくものが主流である。本研究は地盤の基本的モデルある粒状体に関して、粒子間のすべりによる散逸エネルギーと散逸仕事に着目し、最大散逸仕事速度の原理を用いて構成則を定式化する^{1),2)}。なお、ここでは説明を簡単するために平面ひずみ問題として定式化の説明を行う。

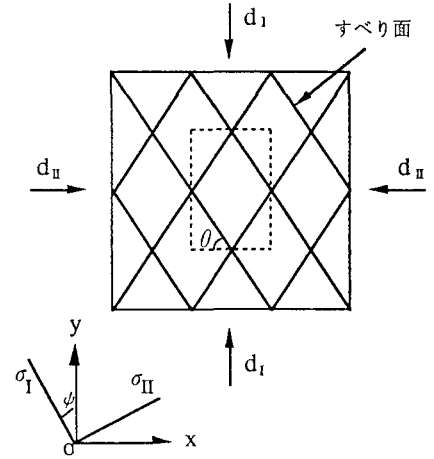
2. 基本的な考え方 粒状体の変形において、弾性部分を除いた散逸的な変形は、図－1に示すようなすべりに起因すると仮定する。このとき、散逸仕事速度 W_d は次のようになる。

$$W_d = \sigma_{ij} d_{ij} = 2q \cos 2\phi \sin 2\theta \alpha - 2\kappa(p + q \cos 2\phi \cos 2\theta) \alpha \quad (1)$$

ここに、 σ_{ij} と p 、 q は応力テンソルと平均応力、軸差応力であり、 d_{ij} は散逸ひずみ速度である。また、 α はすべり量であり、 κ はダイレイタンシー角を表し、内部構造の変化に応じて変化する。 ϕ は主応力軸と主ひずみ軸のなす角であり、 θ は最小主ひずみ軸からすべり面の法線ベクトルとのなす角である（図－1参照）。次に粒子間のすべりによる散逸エネルギーは、すべり面に摩擦則を適用することにより次のように仮定する。

$$\phi = 2\eta(p + q \cos 2\phi \cos 2\theta) \alpha$$

(2) 図－1 主ひずみにおけるすべりモード



ここに、 η は摩擦係数である。

散逸仕事速度と散逸エネルギーは等しい。いま、ある一定のすべり量 α が生じたとき、散逸仕事速度を最大にするという最大散逸仕事速度の原理を仮定すれば、すべりの方向が決定される。これを式で表せば、次の目的関数を最大にするという条件に帰着する。また、粒状体は常に拘束圧を受けることから $\phi \geq 0$ が成立する。

$$F(\theta, \phi, A) = \sigma_{ij} d_{ij} + A[\sigma_{ij} d_{ij} - \phi] \rightarrow \max \quad (3)$$

ここに、 A はLagrangeの未定乗数である。式（3）を θ と ϕ 、 A で偏微分したものを零とおけば、 θ と ϕ 、 A は次のように求まる。

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1}(\eta + \kappa), \quad \phi = 0, \quad A = -\frac{\cos 2\theta + \kappa \sin 2\theta}{\cos 2\theta + (\eta + \kappa) \sin 2\theta} \quad (4)$$

ここで、式（4）₂は主応力軸と主ひずみ軸が一致するという共軸性を表している。以上により流れ則は次のようになる。

$$d_{ij} = (j_i j_j - i_i i_j) \sin 2\theta \alpha - 2\kappa(i_i i_j \sin^2 \theta + j_i j_j \cos^2 \theta) \alpha \quad (5)$$

ここに i_i 、 j_i はそれぞれ x 、 y 方向の単位ベクトル成分である。

すべり量 α を定めるための散逸条件は散逸仕事速度と散逸エネルギーが等しいという条件より次式で与えられる。

$$f(p, q, \theta(\kappa), \kappa) = 2q \sin 2\theta - 2(\eta + \kappa)(p + q \cos 2\theta) = 0 \quad (6)$$

上式より、散逸ひずみを生じる载荷過程において、適応の条件は次のようになる。

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \kappa} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \right) \dot{\kappa} = 0 \quad (7)$$

ここで、硬化・軟化則は κ によって決り、 κ を今までに生じたすべり量 α の和である Γ の関数であると仮定する。

$$\kappa = G(\Gamma) \quad , \quad \Gamma = \int \alpha dt \tag{8}$$

ここに、 G はダイレイタンシーに基づいて決定することとする。よって、式(7)は次のようになる。

$$\dot{\kappa} = \dot{G}(\Gamma)\alpha = - \left(\frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} \right) / \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \kappa} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \right) \tag{9}$$

地盤材料の弾性部分を表す構成式を用い、さらに全ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ の中の弾性部分は等方的であるとするすると、構成式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} = & \lambda \left(\dot{\epsilon}_{kk} + 2\kappa\alpha \right) \delta_{ij} \\ & + 2\mu \left\{ \dot{\epsilon}_{ij} - (j_i j_j - i_i j_j) \sin 2\theta\alpha + 2\kappa (i_i j_j \sin^2 \theta + j_i j_j \cos^2 \theta) \alpha \right\} \end{aligned} \tag{10}$$

ここに λ 、 μ はラメの定数である。すべり量 α は上式を式(9)に代入することで求まる。

3. 解析条件 式(10)を適用した例を示す。平面ひずみにおける平均応力一定の排水ひずみ制御試験を行う。粒子の詰まり具合は3通りに変化させた。ここで粒子の詰まり具合は、限界状態初期のダイレイタンシーの値を用いて表すこととした。なお、 κ は γ の4次式と仮定した。諸定数は表-1に示す。

4. 解析結果と考察 図-2に示される応力比とせん断ひずみの関係において、密詰め、普通詰めの場合には応力比のピーク後から応力増加なしにせん断ひずみが増加する限界状態まで軟化している。緩詰めの場合は軟化は示さず、限界状態まで絶えず硬化している。また、詰め方によらず応力比は0.41に収束していることが観察される。これは、この構成式が地盤材料の挙動をよく表しているためと考えられる。

図-3に示されるダイレイタンシーとせん断ひずみの関係において、限界状態初期のせん断ひずみとダイレイタンシーの値で密詰め、普通詰め、緩詰めが表現できることを示していると考えられる。また密詰め、普通詰めの場合にはダイレイタンシーとせん断ひずみにおけるそれぞれの変曲点P、Qは、応力比のピーク値と一致していることが観察される。

5. あとがき 以上、最大散逸仕事速度の原理を用いて構成則を定式化し、単調載荷試験に適用した。今後さらに繰返し載荷試験への適用や、3次元への拡張のための研究を進めてたいと考えている。

表-1 諸定数

弾性係数 E (kgf/cm ²)	300
ポアソン比 ν	0.35
摩擦係数 η	0.45
拘束圧 σ_0 (kgf/cm ²)	2.0
限界状態初期のせん断ひずみ γ_s (%)	15.0
ダイレイタンシー値 (%)	
密詰め	4.00
普通詰め	1.75
緩詰め	-2.30
せん断ひずみ速度 $\dot{\gamma}$ (%)	0.01
軸差応力速度 $\dot{q}$ (kgf/cm ²)	0.001

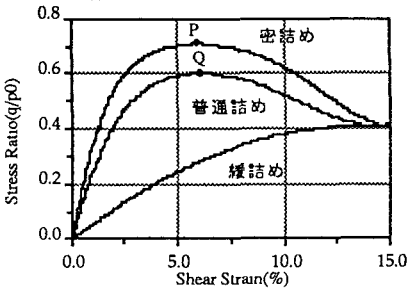


図-2 応力比とせん断ひずみの関係

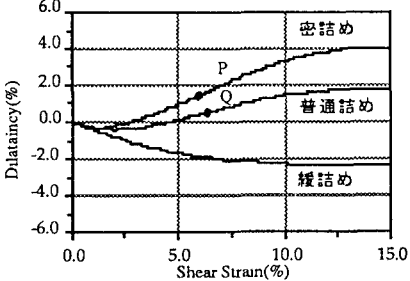


図-3 ダイレイタンシーとせん断ひずみの関係

参考文献

- 1) 岸野佑次:散逸関数に基づく粒状体の流れ則の誘導,土木学会論文集,第394号/III-9, pp.115-122, 1988.
- 2) Kishino.Y:Derivation of constitutive law for granular materials based on dissipative functions, Advances in Micromechanics of Granular Materials, pp11-19, 1992.