

### Ⅲ - 3

#### ループテンソルとその分散による粒状体の解析

学生員 安保祥成  
東北学院大学工学部 正員 佐武正雄  
堀 雄一

##### 1. まえがき

粒状体において、間隙率とともにその分布が重要なことが指摘されている<sup>1)</sup>。本文では、2次元のパッキングのグラフ表現において間隙とループが対応することから、一つの間隙に対してループテンソルを定義し、全体のパッキングについて平均ループテンソルと分散テンソルを導入する。平均ループテンソルは、通常枝テンソルと呼ばれるファブリックテンソルと同一のものである。分散テンソルは間隙の分布の状態を示す量と考えられ、規則配列では0となる。本文では、これらのテンソルの定義を述べ、等円パッキングにおけるマイクロエレメントに対する量を与える。また、ループテンソルの性質について説明する。

##### 2. ループテンソル・平均ループテンソル・ループ分散テンソルの定義

図示のように、一つの間隙に対応するループエレメント $k$ に対して、ループテンソル $\psi_k$ を次のように定義する。

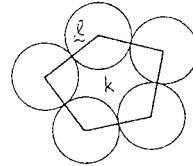


図 1 ループテンソル

$$\psi_k = \frac{1}{2} \sum_{i \in k} \underline{l}_i \otimes \underline{l}_i \quad (1)$$

ここに、 $\underline{l}_i$ は枝ベクトルで、 $\sum_{i \in k}$ は $k$ に属するもののみについて和をとることを意味する。

次に、パッキング全体に関する平均ループテンソル $\psi$ とループ分散テンソル $\mu$ は次式によって定義する。

$$\psi = \frac{1}{N} \sum \psi_k = \frac{1}{N} \sum \alpha \underline{l}_i \otimes \underline{l}_i \quad (2) \quad \mu = \frac{1}{N} \sum (\psi_k - \psi)^2 \quad (3)$$

ここに $N$ はパッキングに含まれるループエレメントの総数で、 $\alpha = \frac{1}{2}$ （境界の枝について）、 $\alpha = 1$ （内部の枝について）である。

##### 3. 等円パッキングにおけるループエレメントとマイクロエレメント

表-1に等円パッキングにおける基本的なループエレメントとそのループテンソルを示す。表中、 $\underline{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ （単位テンソル）であり、 $L=2$ 以外は等方性をもつ。

表-1 ループエレメント

|           | L=1 | L=2                         | L=3             | L=4                         |
|-----------|-----|-----------------------------|-----------------|-----------------------------|
|           |     |                             |                 |                             |
| $N$       | 1   | 4                           | 1               | 6                           |
| $N_{int}$ | 0   | 0                           | 1               | 2                           |
| $N_{bnd}$ | 0   | 0                           | 0               | 4                           |
| $\alpha$  | 0   | 0.5                         | 1               | 0.5                         |
| $\psi$    | 0   | $\frac{1}{2} \underline{I}$ | $\underline{I}$ | $\frac{1}{2} \underline{I}$ |
| $\mu$     | 0   | 0                           | 0               | 0                           |

表-2 マイクロエレメント（等方）

| $N$       | 4               | 9               | 16              | 25              |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $N_{int}$ | 4               | 5               | 6               | 7               |
| $N_{bnd}$ | 0               | 0               | 0               | 0               |
| $\alpha$  | 1               | 1               | 1               | 1               |
| $\psi$    | $\underline{I}$ | $\underline{I}$ | $\underline{I}$ | $\underline{I}$ |
| $\mu$     | 0               | 0               | 0               | 0               |

一つの粒子を中心にして、それを取り囲む粒子によって作られる粒子の集合体をマイクロエレメントという<sup>2)</sup>マイクロ

エレメントは、1点が入部にあるループエレメントの集合体である。

表-1のループエレメントから作られるマイクロエレメントについて、表-2に等方的なもの、表-3にL-2を含む異方的なものいくつかを示す。

表-3 マイクロエレメント (異方)

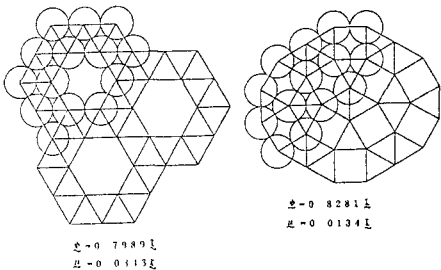
| 粒子数            | 8                                                    | 8                                                    | 9                                                    | 9                                                    | 10                                                   |
|----------------|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| ループ数           | 4                                                    | 5                                                    | 4                                                    | 5                                                    | 5                                                    |
| N <sub>3</sub> | 1                                                    | 3                                                    | 0                                                    | 2                                                    | 1                                                    |
| N <sub>4</sub> | 1                                                    | 0                                                    | 2                                                    | 1                                                    | 0                                                    |
| N <sub>5</sub> | 2                                                    | 2                                                    | 2                                                    | 2                                                    | 4                                                    |
| 辺数             | 11                                                   | 12                                                   | 12                                                   | 13                                                   | 14                                                   |
| 面積             | 3.365                                                | 3.231                                                | 3.932                                                | 3.798                                                | 4.297                                                |
| 間隙率            | 0.1831                                               | 0.1492                                               | 0.2010                                               | 0.1728                                               | 0.1774                                               |
| μ-テンソル         | $\begin{pmatrix} 1.0625 & \\ & 0.8125 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.9535 & \\ & 0.7165 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$           | $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0.8 \end{pmatrix}$         | $\begin{pmatrix} 0.9036 & \\ & 0.9964 \end{pmatrix}$ |
| μ-分散テンソル       | $\begin{pmatrix} 0.1156 & \\ & 0.1144 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.0621 & \\ & 0.0602 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.0335 & \\ & 0.0375 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.0518 & \\ & 0.0118 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.0657 & \\ & 0.0595 \end{pmatrix}$ |

#### 4. ループテンソル・平均ループテンソル・ループ分散テンソルの性質

これらのテンソルは次の基本性質をもつ。

- (1) ループエレメントが正多角形であればループテンソルは等方である。この場合、ループは等方的であるという。
- (2) 粒子集合体においてループエレメントが全て等方的であれば、平均ループテンソルも等方である。
- (3) 一種類のループエレメントから作られる規則配列ではループ分散テンソルは0となる。
- (4) ループエレメントにおいて、ループの辺数が増大すればループテンソルのトレースが増大する。従って等円パッキングの場合、平均ループテンソルのトレースから平均余剰数を求めることができる。

図. 2 は、二つの等方的な等円のパッキングの例である。(a)の方が(b)よりループ分散テンソルの値が大きくなっているが、このことは(a)の方が間隙分布の不均一性が大きいことを表している。



#### 5. あとがき

2次元の粒子のパッキングについて、ループテンソル・平均ループテンソル・ループ分散テンソルを用いるとパッキングや間隙の性質を解析できることを説明した。今後、これらのテンソルを粒状体の力学的性質の解析に応用してゆきたいと考えている。

#### ・参考文献

- 1) T. Mogami, A Statisticai Approach to the Mechanics of Granular Materials, Vol. 5 No. 2, pp26-36, 1965
- 2) C. S. Chang, Micromechanics Modelling for Deformation and Failure of Granular Material, Advances in Micromechanics of Granular Materials, Elsevier, pp251-260, 1992