

Ⅲ－2 砂の様な粒状体の構造テンソルの発展則について

八戸工業大学（正） 飛田善雄

1. はじめに

砂の様な粒状体の変形挙動がその内部構造に大きく影響されることは、間隙比の影響、初期および誘導異方性の影響、に関する実験結果で明らかである。その内部構造を数学的に表現するものとして、構造テンソルが提案されている。これは、ある領域（代表的な体積要素、通常RVEと記述される）の幾何学的な量（例えば、接点の方向や粒子の長軸方向など）の空間的分布の特性を2階のテンソルとして表現したものである。これまでに、この構造テンソルが塑性変形中に、どのように変化するかについての詳細な検討はなかった。内部構造の変化に対する既知の事項は、かなり限定されたものであるが、この限られた事実を満足するように、合理的に定式化することは案外難しい。本稿では、構造テンソルの発展則（移行則とも呼ばれる）の定式化について、その必然性、既知の事項、定式化に際して留意すべき事項についてまとめる。

2. 構造テンソルの発展則が必要となるケース

砂の様な粒状体は堆積時に異方性を有しているのが普通である。この異方性の内、破壊時までにはほとんど変化しないもの（粒状体では、これを固有異方性と呼んでいる。粘土の場合には、ある規準時刻における異方性を固有異方性と呼んでいる。力学的には粘土の定義の方が普遍性があり、この異方性是不変異方性と呼ぶほうが適切であろう）、変形にともない容易に変化する誘導異方性があることが知られている。固有異方性、誘導異方性が絡み合って砂のような粒状体の変形・破壊挙動に影響を及ぼしている。

一般に、砂の破壊においては「固有異方性の影響が大きく、誘導異方性の影響はない」とされている。これは、破壊時の内部摩擦角 ϕ が、それまでの経路と変形の大きさに殆ど影響されないことから導かれる結論である。しかし、変形に大きな影響を与える誘導異方性が破壊挙動に対して全く影響を与えない、と考えるのは論理的ではない（すべり線の発生などは変形挙動に左右されるのである）。実際には、破壊時に発揮される誘導異方性は、どの様な場合もほぼ同様であるため、その影響が観察されにくいと考えるべきである。このことも合理的な発展則を考察する上で重要になる。つまり、破壊時には、過去の経路がどんなものであれ、ほぼ同一の誘導異方性を与えるようなモデルを構築する必要がある。

変形挙動に及ぼす誘導異方性の影響は顕著である。繰り返し載荷時、主応力軸が回転する、いわゆる非比例負荷時の変形挙動、せん断と圧密の連成挙動、これらの表現には誘導異方性の発展則の定式化が必要である。現在までに提案されている構成モデルが必ずしも複雑な応力経路下における変形特性（例えば、液状化解析に大切なサイクリックモビリティ現象など）を、定性的にさえも、表現できない原因の一つは、構造テンソル（より、一般的な構成モデルの用語でいえば、内部変数）の発展則の適切な定式化がなされていない現状をあげることができる（例えば、飛田&吉田、1993）。

3. 構造変化に対して既に知られていること

砂の様な粒状体の内部構造の変化についての情報はかなり限定されている。整理してみれば、次の二つに要約できる。

（１）主応力軸方向が変化しない比例せん断負荷経路では、誘導異方性を表現する構造テンソルの主軸は応力テンソルの主軸に一致するようになる。最大圧縮応力方向の構造は硬化し（接点が増加し）、最小圧縮応力方向の構造は軟化する（接点が減少する）。特に、正のダイレイタンス領域での最小圧縮応力方向の接点の減少が著しい。

（２）主応力軸方向が連続的に回転する経路では、構造テンソルの主軸は同じ方向に回転する。変形が大きくなるに従って、構造テンソルの主軸は主応力軸と次第に一致するようになる。

この二つの実験事実のうち、一つを満足するように定式化することは、比較的容易なことである。例えば、（１）のみを満足させるのであれば、弾塑性理論の古典的な定式化である非関連流動則を利用して満足させることができる。また（２）であれば、最初から構造テンソルと応力テンソルの主軸方向が一致するよ

うな定式化を数式的に与えれば、ほぼ満足する発展則となる。しかし、この二つの事実を同時に満足する様なモデルの定式化を行なうことは極めて難しい。

このことは、応力とひずみの速度形式における構成モデルの現状を考えれば容易に理解できることである。すなわち、単調負荷時の変形挙動は、古典的な定式化で行なうことが可能であるが、(2)の様な主応力回転時にも適用できるような構成モデルは(形式的な議論はあるにせよ)、その具体的な形は、未だに提案されていないのが現状なのである。つまり、応力速度・ひずみ速度関係式にせよ、構造変化速度にせよ、主応力回転を含む非比例負荷経路にも適用可能であることを要求すると、構成モデルの構築は著しく難しい問題になってしまうのである。

4. 定式化において留意すべき事項

構成モデルの中では、構造テンソルは“内部変数”としてとらえることができる。いま、これを $\mathbf{H}$ と表現する。以下の議論は弾塑性構成モデルに限定する。この時、速度形式の構成式は一般に次の形式で記述できる。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \mathbf{L} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad ; \mathbf{C}^e = \mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}) \quad (2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{P} \quad ; \mathbf{P} = \mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}, \mathbf{r}), \mathbf{r} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} / |\dot{\boldsymbol{\sigma}}| \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\lambda}_{\mathbf{H}} \mathbf{P}_{\mathbf{H}} \quad ; \mathbf{P}_{\mathbf{H}} = \mathbf{P}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}, \mathbf{r}) \quad (4)$$

この式では、負荷関数の存在を、簡単のために、暗黙の内に仮定している。 $\mathbf{r}$ は応力速度の方向の影響が構成モデルに入り込んでいることを表現している。(3)あるいは(4)式で $\mathbf{r}=\mathbf{0}$ すなわち、応力の方向の影響がないとできる場合は、速度形式では、(1)式の $\mathbf{L}$ は応力速度の方向の影響はなくなり、線形性を示すことになる。 $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ の場合には速度形式においても、非線形性(応力速度の方向に応じて $\mathbf{L}$ が変化する)を示すことになる。注意すべきことは、(3)あるいは(4)のどちらかに $\mathbf{r}$ が入り込んでくれば、(1)式の $\mathbf{L}$ は、状態 $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H})$ とスカラー変数で表現される)のみの関数として、唯一には決定されず、応力速度の方向の影響を受けることになることである。

構成モデルの対象が、比例負荷経路のみであれば、(3)(4)式に $\mathbf{r}$ を取り入れなくても十分にその挙動は表現できる。しかし、主応力回転を含む非比例負荷経路の挙動も正確に表現しようとするとき、 $\mathbf{r}$ の影響が入り込んでくるようである。金属においても、(3)式に $\mathbf{r}$ の影響を取り入れない場合(負荷関数に対して法線流れ則を仮定している)、(4)式(背応力の発展則)に $\mathbf{r}$ の影響を取り入れないと、実験事実が表現できないことが報告されている。その結果、(1)式の $\mathbf{L}$ は、負荷関数の適合条件を介して、応力速度の方向の影響を受けることになる(e.g., McDowell, 1987)。

(1)～(4)の式いずれもが、客観性の条件を満足すべきことは自明のことである(Tobita, 1989)。また、Clausius-Duhemの不等式も満足するように定式化する必要がある(例えば、北川)。残念ながら、これらの制限条件のみでは具体的な定式化を行なうことは不可能であり、適切な構造の発展則を導入するためには、数値計算を伴う試行錯誤が必要となる。

現在、 $\mathbf{r}$ の影響を含むもの2種類、含まないもの2種類に対して、比例負荷経路および、非比例負荷経路に対する適用性を検討している。

参考文献

飛田・吉田(1993) 土木学会構造工学シンポジウム論文集 ; McDowell(1987): J. Applied Mechanics, Vol.54, pp.323-334; Tobita(1989): Soils and Foundations, Vol.29, No 4, pp 91-104; 北川(1987): 弾塑性力学、裳華房