

II - 56

有限要素法による津波数値計算の検討

東北大学工学部 学生員 ○高橋 武之
 東北大学工学部 正 員 今村 文彦
 東北大学工学部 正 員 首藤 伸夫

1 はじめに

現在、津波の数値計算は主に差分法で行われているが、リアス式海岸等の複雑な地形や変化に富んだ海岸線を表すには、要素の形や大きさを任意に選ぶことのできる有限要素法の方が有効である場合がある。これまでに、いくつかの有限要素法による計算方法が提案されて用いられているが、数値減衰が大きいなどの計算精度の点で問題が残っている。そこで本研究では、簡単な一次元長方形水路を用い、有限要素法による数値計算を行った場合、離散化の際に付加される数値粘性項及び数値分散項が精度に与える影響を検討するものである。

2 基礎方程式と計算方法

基礎方程式には浅水長波理論に基づき、連続の方程式と運動方程式を用いる。これらの式に重みをかけて有限要素方程式を作成し、ガラーキン法に従って空間方向への離散化を行う。なお、補間関数には1次多項式を用いる。また、時間方向へはKawaharaら(1978)にならい、安定性がよい修正2段階ラックス-ヴェンドロフ法を用いて離散化を行う。この際、高速計算を可能にするために、質量マトリクス M の非対角項を対角項に集めた形の集中化質量マトリクス $\bar{M}$ を用いて、数値的減衰を取り除くためにこの2つのマトリクスを混合させた混合化質量マトリクス $\tilde{M}$ を新しい質量マトリクスとする。混合化質量マトリクスは(1)式で表される。

$$\tilde{M} = e \bar{M} + (1 - e) M \quad (1)$$

ここで e は混合比である。

3 計算結果

図1は、節点数63、要素数80の有限要素によってモデル化された幅1m、長さ10m、水深1mの長方形水路の要素分割図である。要素幅は $\Delta x = 0.5m$ である。この水路に、片側（入口側）から周期 $T = 3.19s$ 、振幅0.1mの正弦波を伝播させ、時間 $t = 5s$ における水路中心線上での波形を取り出して理論解と比較する。ただし、長方形水路の出口では進行波の条件を与え、波が透過するようにしてある。図2は時間間隔 $\Delta t = 0.01s$ として計算を行ったものである。このとき $K = 0.063$ である。ここで、 K はクーラント数であり、 $K = c_s \Delta t / \Delta x$ で与えられる。丸印は混合比 $e = 0.7$ 、三角印は混合比 $e = 0.8$ 、四角印は混合比 $e = 0.9$ 、実線は線形理論解である。この図から混

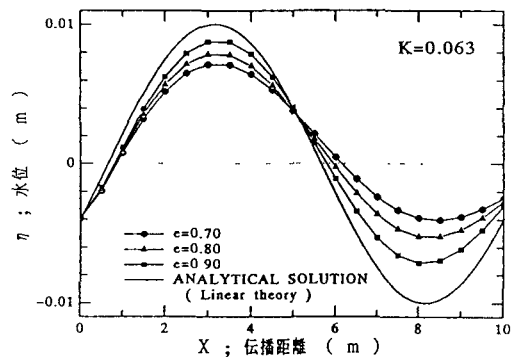


図 2

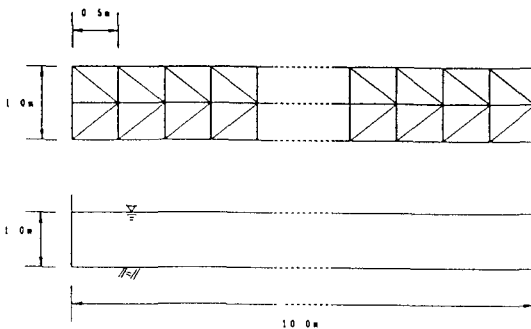


図 1

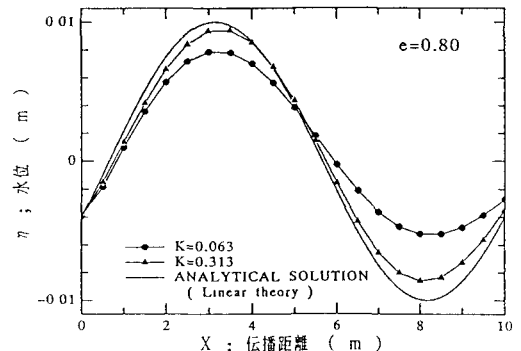


図 3

合比 e の値を大きくすると数値的な減衰は減少する傾向にあることが分かる。ただし、 e の値が1.0を越え
 ると解は収束せず発散する。次に、 K の値が計算結果にどのように影響があるのか調べてみる。 K が0.06
 3のときと0.313のときの波形を比較してみたものが図3である。混合比 e は0.8にとってある。この図から
 K の値を大きくすると数値的な減衰が取り除かれる傾向にあることが分かる。

4 Taylor級数による打ち切り誤差の解析

議論を簡単化するために、線形長波理論、一次元伝播、線形要素の仮定の基に有限要素方程式を離散化
 すると(2)式ようになる。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{c_0^2}{3} (1-e) \frac{\Delta x}{K} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} - \frac{c_0^2}{3} \Delta x^2 \{ (2-e) - K^2 \} \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} = 0 \quad (2)$$

この式の第3、4項はそれぞれ数値誤差（粘性項、分散
 項）であり、これらの項の存在が数値的な波高減衰をも
 たらしていると考えられる。さらにこの式をフーリエ変
 換を用いて解き、増幅係数（粘性）と伝播速度比（分散
 性）を求めてみる。これらの結果を表したものが図4、
 図5である。ここで破線は $e = 0.7$ 、実線は $e = 0.9$ の
 ときのものである。増幅係数、伝播速度ともに e と K の両
 方に依存している。そして、 e と K の値が大きい程、増
 幅係数、伝播速度比はともに1に近づくことが分かる。
 これより、数値的な減衰をおさえるには e 、 K の値を大
 きく（1に近づける）すればよいことが確かめられた。
 これは先に述べた計算結果と一致する。また、差分法に
 おいて2-step Lax-Wendroff法、Leap-frog法を用いて離
 散化した場合には数値誤差はそれぞれ(3)、(4)式の様
 になる。

$$c_0^2 \Delta x \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} - \frac{c_0^2}{3} \Delta x^2 (1-K^2) \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \quad (3)$$

$$- \frac{c_0^2}{3} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 (1-K^2) \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \quad (4)$$

これら(2)、(3)、(4)式を比較することによりLeap-frog
 法は粘性効果と分散効果の両方において、2-Step Lax-W
 endroff法よりも影響が少ないことが分かる。

5 結論

質量マトリクスと集中化質量マトリクスの混合比 e の
 値を1に近づけることにより数値的な減衰が減少するこ
 とが確認された。また、有限要素法で津波の数値解析を
 行う場合、粘性項による減衰の他に分散項による減衰も
 かなり大きいことが確認された。この項による減衰を抑
 えるには、クーラント数 K の値を大きくとればよいことが分かった。ただし、 K の値は時間間隔 Δt にもよ
 るので計算が不安定にならないように適切な値を選ばなければならない。

参考文献

Kawahara, M et al.: Selective Lumping Finite Element Method for Shallow Water Flow, Int. Num. Met
 h. Fluid. Vol2, pp. 89-112, 1982.
 今村文彦・後藤智明: 差分法による津波数値計算の打ち切り誤差, 土木学会論文集, 第375号 / II-6, pp. 2
 41-250, 1987.

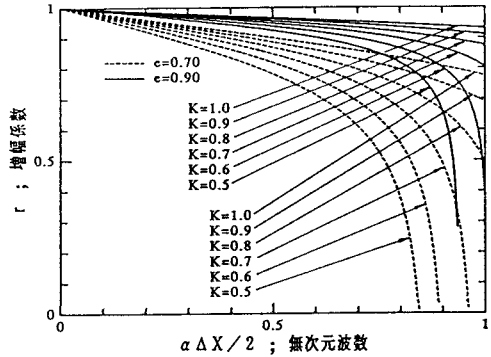


図 4

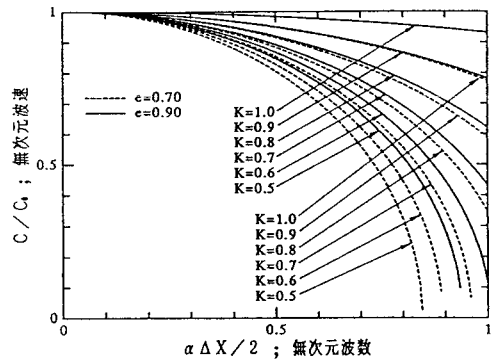


図 5