

## II-44 フーリエ・スペクトル法によるソリトン方程式の数値解析

東北学院大学 学生員 ○鹿内 修  
東北学院大学 正会員 河野幸夫  
東北大学 正会員 今村文彦

### 1 はじめに

前年度までの研究でフーリエ・スペクトル法が線形の偏微分方程式についてはかなり精度が良い数値解法であることが確かめられた。今回はそのフーリエ・スペクトル法の非線形偏微分方程式に対する実用性について、ソリトン波を解に持つK-dV方程式を数値解析することによって検討することにした。

### 2 フーリエ・スペクトル法

非線形の偏微分方程式、K-dV 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (1)$$

を区間  $[-\pi, \pi]$  での周期境界条件のもとで解くことを考える。  
未知関数  $u(x, t)$  は、次のような固有関数  $e^{ikx}$  によってフーリエ級数展開できる。

$$u^N(x, t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \bar{u}_k(t) e^{ikx} \quad (2)$$

今、(1) 式にフーリエ変換を適用すれば

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{\partial u^N}{\partial t} - 6u^N \frac{\partial u^N}{\partial x} + \frac{\partial^3 u^N}{\partial x^3} \right) e^{-ikx} dx = 0, \quad k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1 \quad (3)$$

(3) 式を実行すると未知関数  $u$  の変位変数  $x$  は物理空間から次式のような  $k$  という波数空間へと移行する。

$$\frac{d \bar{u}_k}{dt} - 6 \left( \overline{u^N \frac{\partial u^N}{\partial x}} \right)_k + (ik)^3 \bar{u}_k = 0, \quad k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1 \quad (4)$$

ここで左辺第2項の非線形項は次式のように書くことができる。

$$\left( \overline{u^N \frac{\partial u^N}{\partial x}} \right)_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u^N \frac{\partial u^N}{\partial x} e^{-ikx} dx \quad (5)$$

いま  $u^N = u$ ,  $\partial u^N / \partial x = v$  とおけば (5) 式は (6) 式のように表すことができる。

$$\left( \overline{u v} \right)_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u v e^{-ikx} dx \quad (6)$$

ここで、(6) 式の計算では物理空間での値 ( $u, v$ ) に対して有限 Fourier 変換を行ない求めるのが通常である。しかし、ここで計算数を限定することにより、(6) 式の値は (7) 式のような重ね合わせの計算で代用することができるのである。

$$\left( \overline{u v} \right)_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{p+q=k} \bar{u}_p \bar{v}_q \quad (7)$$

よって以上より、(1) 式の偏微分方程式は Fourier 変換を用いることにより

$$\frac{d \bar{u}_k}{dt} - \frac{6}{2\pi} \sum_{p+q=k} \bar{u}_p \bar{v}_q + (ik)^3 \bar{u}_k = 0, \quad k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1 \quad (8)$$

(8) 式のようなフーリエ級数展開の係数についての常微分方程式に変換することができるので

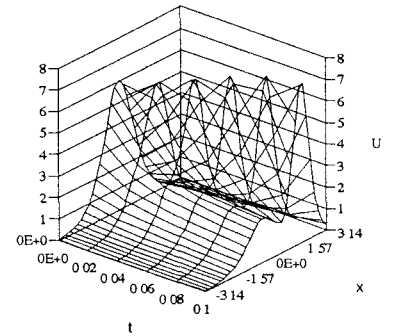


図 - 1 K-dV 方程式の解析解

ある。この常微分方程式を解くことにより、 $\overline{u}_k$ を求めることができ、この求められた値  $\overline{u}_k$ を (2) 式にあてはめることにより、もとの方程式の近似解  $u^N(x,t)$  が得られるのである。  
 (8) 式の常微分方程式の初期値  $\overline{u}_k(0)$  は次式のFourier 変換を行なうことにより与えることが出来る。

$$\overline{u}_k(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u_0(x,0)e^{-ikx}dx\tag{9}$$

また (8) 式の常微分方程式は、4 次のRunge-Kutta法などの高精度の数値解法が用意されており、かなり精度良く求められるのである。

### 3 解析結果と考察

(1) のK-dV方程式の厳密解は次のように双曲線関数coshを含む分数で表すことができる。

$$u=-12\frac{3+\cosh(4x-64t)+4\cosh(2x-8t)}{\{\cosh(3x-36t)+3\cosh(x-28t)\}^2}\tag{10}$$

(10)式で  $t=0$  とすると次のようになる。

$$u=-6\operatorname{sech}^2x\tag{11}$$

すなわち(11)を初期値として数値解析すれば厳密解と比較することができるのである。

グラフから、フーリエ・スペクトル法が 厳密解とかなり一致していることがわかる。Explicit 法では  $t=0.05$ の時点でもはや発散してしまっている。ただしフーリエ・スペクトル法でも時間推移にしたがって、曲線の傾きが大きく変化する部分、すなわち波の谷や山のような部分に僅かではあるが誤差が現われている(図-3)。これはモード数Nを大きくし  $dx$  を小さくすることによって解決する。またフーリエ・スペクトル法では、周期境界条件下での解法であるので、リンク効果や、波の折り返しの原理による誤差の影響も考えられたが、図-4のように周期を大きくとることによって解決している。

### 4 おわりに

以上のことから、非線形偏微分方程式 に対してフーリエ・スペクトル法がかなり実用的 であるということがわかった。これからの課題としては他の非線形偏微分方程式に対しての有効性を調べる ことである。

#### <参考文献>

I.C.Canuto, M.Y.Hussaini, A.Quarteroni, T.A.Zang (1987):Spectral Methods in Fluid Dynamics (Springer-Verlag)

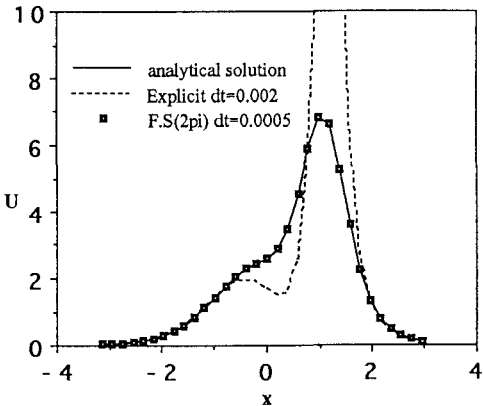


図 - 2 厳密解と数値解との比較 t=0.05

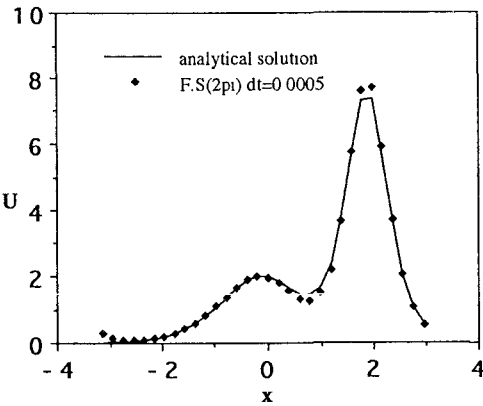


図 - 3 厳密解と数値解との比較 t=0.1

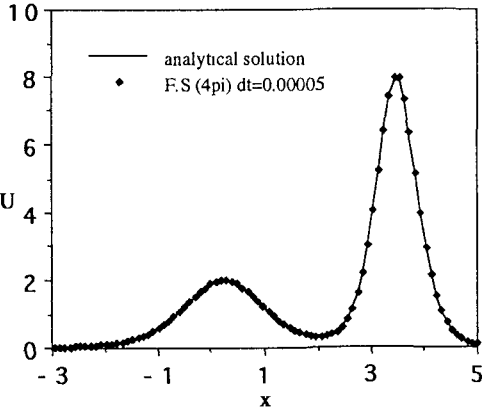


図 - 4 厳密解と数値解との比較 t=0.2 N=128