

II-31

平面せん断流の流速分布についての考察

東北大学工学部 ○学生員 山浦勝明
東北大学工学部 正 員 石川忠晴

1. はじめに

近年、複断面河道や植生分布を持つ河道の流れに関連して、平面せん断流の研究が進んでいる。一般に、この流れは浅水方程式を基礎方程式とし、特に等流状態の特性が詳しく論じられている。その際、主に用いられているのは摂動法の第1近似解で、特に精度が要求されるときには第2近似解が用いられている。しかし、その摂動解がどの程度の精度を持ち合わせているのかは、まだ正確には確かめられてはいない。そこで、本研究では、等流状態に対して厳密解を求めて、摂動解の収束性と精度を検討する。

2. 厳密解の誘導

等流状態での浅水方程式は、

$$g i_0 + \varepsilon \frac{d^2 u}{dy^2} - \frac{f}{H} u^2 = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 ε ：水平方向渦動粘性係数、 f ：摩擦係数、 u ：鉛直平均流速、である。次に混合領域より十分離れた領域では鉛直面内のせん断力が働かないために次式が成り立つ。

$$g i_0 - (f/H) u_\infty^2 = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

(1)式より(2)式を差し引き、 $u = u_\infty + v$ とすると次式が成り立つ。

$$\varepsilon \frac{d^2 v}{dy^2} - \frac{f}{H} (2 v u_\infty + v^2) \quad \dots \dots \dots (3)$$

(3)式において v を u_∞ で、 y を δ (排除厚さ)で無次元化すると、

$$k V'' - 2 V - V^2 = 0 \quad \dots \dots \dots (4)$$

ここで、 $v/u_\infty = V$, $y/\delta = \eta$, $(\varepsilon H/f \delta^2 u_\infty^2) = k$

(4)式全体に V' を乗じて、積分すると、

$$V' = -V \sqrt{\frac{2}{k} (1 + \frac{1}{3} V)} \quad \dots \dots \dots (5)$$

(5)式を解くと次式の厳密解が得られる。

$$V = \frac{12 C \exp(-\sqrt{2/k} \eta)}{(1 - C \exp(-\sqrt{2/k} \eta))^2} = \frac{12 e}{(1 - e)^2} \quad \dots \dots \dots (6)$$

ただし、 $e = C \exp(-\sqrt{2/k} \eta)$, $C = (V_0 + 6 - 2\sqrt{3(V_0 + 3)}) / V_0$ 。

(6)式は混合領域片側についての厳密解であり、全断面に対する流速分布を考えるには適合条件を考えて速度分布を接続する必要がある。

3. 摂動解の収束性の検討

せん断流の流速差があまりないとすると、無次元化した式(4)における V のオーダーは1より小さい。そこで、 V のオーダーを α として次のように式を書く。

$$V'' - 2 V - \alpha V^2 = 0 \quad \dots \dots \dots (7)$$

ここで、 V を $V = V_1 + \alpha V_2 + \alpha^2 V_3 + \dots$ のように展開できるとして、(7)式に代入すると

$$(k V_1'' - 2 V_1) + \alpha (k V_2'' - 2 V_2 - V_1^2) + \alpha^2 (k V_3'' - 2 V_3 - 2 V_1 V_2) + \dots = 0$$

この式は全体として $=0$ であるが、 α のべき乗ごとに $=0$ になると仮定する。これはかなり大きな仮定であるが、この仮定は十分条件であり、正解かどうかは解が決まってから考えれば良い。そこで、

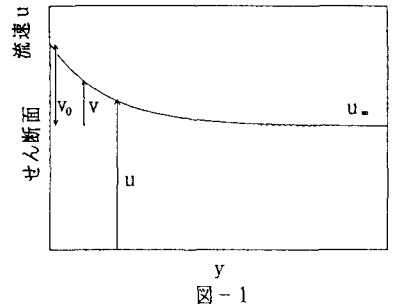


図-1

第1近似方程式 $k V_1'' - 2 V_1 = 0$

第2近似方程式 $k V_2'' - 2 V_2 - V_1^2 = 0$

第3近似方程式 $k V_3'' - 2 V_3 - 2 V_1 V_2 = 0$ 第j近似方程式 $k V_j'' - 2 V_j - \sum_{i=1}^{j-1} V_i V_{j-i} = 0$

この解を順次求めると、

第1近似式の解 $V_1 = V_0 \exp(-\sqrt{\frac{2}{k}} \eta)$ 第2近似式の解 $V_2 = \frac{V_0^2}{6} \exp(-2\sqrt{\frac{2}{k}} \eta)$

第3近似式の解 $V_3 = \frac{V_0^3}{48} \exp(-3\sqrt{\frac{2}{k}} \eta)$

第j近似式の解 $V_j = \frac{V_0^j}{12^{j-1}} \exp(-j\sqrt{\frac{2}{k}} \eta)$

紙数の都合で証明を省略するが、上の級数求和は、(6)式のテーラー展開と一致する。すなわち、摂動解は厳密解に収束する。

4. 低次の摂動解の近似性

厳密解の接続のための適合条件は、

$$V_{02} - V_{01} = u_{1\infty} - u_{2\infty} \quad \dots \dots \dots (8)$$

$$du_1/dy|_{\eta=0} = du_2/dy|_{\eta=0} \quad \dots \dots (9)$$

(8)式を、 $u_{1\infty}$ で除して無次元化すると、

$$V_{02}(\frac{u_{2\infty}}{u_{1\infty}}) - V_{01} = 1 - (\frac{u_{2\infty}}{u_{1\infty}}) \quad \dots \dots \dots (8)'$$

(9)式は次式のようになり、

$$\frac{C_2(1+C_2)}{(1-C_2)^3} \sqrt{u_{2\infty}} + \frac{C_1(1+C_1)}{(1-C_1)^3} \sqrt{u_{1\infty}} = 0$$

これを整理して、同様に $u_{1\infty}$ で除して無次元化すると、

$$V_{02}^2(1 + \frac{V_{02}}{3}) \frac{u_{2\infty}}{u_{1\infty}} = V_{01}^2(1 + \frac{V_{01}}{3}) \quad \dots (9)'$$

(8)', (9)'式より、 $u_{1\infty}$ と $u_{2\infty}$ の比を与えると V_{01} と V_{02} は決定する。ここで、 $u_{2\infty}/u_{1\infty} = \beta$ とおくと、

$$V_{01} = \{2/\beta(\beta+1)\}^{1/3} - 1$$

$$V_{02} = \{2\beta^2/(\beta+1)\}^{1/3} - 1$$

これによって、厳密解を求めることができる。

なお、 $\delta_2/\delta_1 = \sqrt{\beta(1-C_2)/(1-C_1)}$ であり、図-3には領域(1)の排除厚さを1とした場合について図化している。同図には、第1近似解も一緒に記入してあるが、この解は山崎らによって求められているので次式で表される。

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta+1}} \exp(-\eta) \quad V_2 = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta+1}} \exp(-\sqrt{\frac{1}{\beta}} \eta)$$

5. 結論

厳密解と第1近似解の誤差は、それぞれの領域の等流流速の差が大きいほど、大きくなっている。しかし、その誤差はわずかであり、多くの場合は問題はないといえる。

厳密解はその形が複雑であり普通に使うのにはあまり具合が良くない。そこで、ここで確かめられたように、わずかな誤差しかない摂動解を用いるのが実用的であるといえる。

【参考文献】

山崎・石川・金丸:開水路平面せん断流に関する実験的研究, 土木学会第39回年次学術講演会講演集, 1984

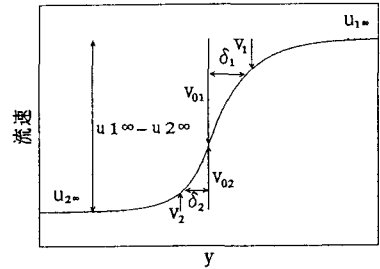


図-2

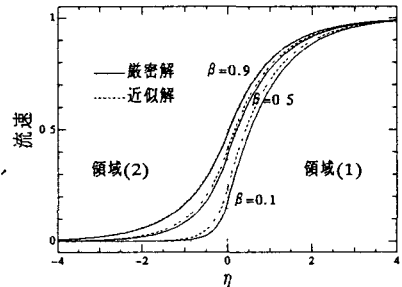


図-3 厳密解と近似解の比較