

I-28

境界帯板法による矩形平板の面内応力解析

岩手大学工学部 正 員 出戸 秀明 岩崎 正二 宮本 裕
 岩手大学工学部 玉内 秀佳 高橋 敏文

1. はじめに

著者らはこれまでに、有限帯板法の考え方に境界積分方程式の手法を組み合わせた境界帯板法 (Boundary Strip Method)^{1), 2)} により矩形平板の曲げ応力解析を行なってきた³⁾ が、本論文は同様に矩形平板の面内応力問題を解析しようとするものである。境界帯板法と呼ばれている方法は、たわみの変位関数として一方向の境界条件を満足する級数解を用いて平板の支配微分方程式を一次元問題に還元し、残りの方向に対して境界積分方程式法に基づく定式化を行なうものである。

2. 解析理論

直交異方性平板の面内応力問題の支配微分方程式は、式(1)のように表わすことができる。ただし、 u, v は平板の x, y 方向変位、 X, Y は単位面積当りの x, y 方向力とする。

$$\left. \begin{aligned} N_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (N_1 + N_{xy}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + N_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= X \\ N_y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (N_1 + N_{xy}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + N_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= Y \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 N_x, N_y, N_{xy}, N_1 は直交異方性パラメータである。

図-1のように境界边上で S, T の法線力と接線力が作用する、長さが ℓ_x, ℓ の矩形平板を考える。また、対辺単純支持を仮定すると x, y 方向変位と x, y 方向力は以下のように展開することができる。ただし、 X_n, Y_n は力の状態によって変わる係数である。

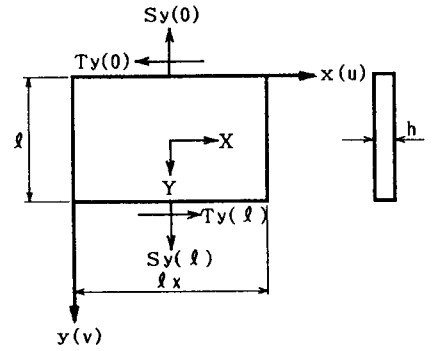


図-1 直交異方性矩形平板

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \cos(\alpha_n x), & X &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(y) \cos(\alpha_n x) \\ v(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(y) \sin(\alpha_n x), & Y &= \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin(\alpha_n x) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ただし、 $\alpha_n = n\pi/\ell_x$, $n=1, 2, 3, \dots$ 。

式(2)を式(1)に代入すると支配微分方程式は次のような一次元の問題となる。

$$N_{xy} \frac{d^2 u_n(y)}{dy^2} + (N_1 + N_{xy}) \alpha_n \frac{dv_n(y)}{dy} - N_x \alpha_n^2 u_n(y) = X_n \quad (3)$$

$$N_y \frac{d^2 v_n(y)}{dy^2} - (N_1 + N_{xy}) \alpha_n \frac{du_n(y)}{dy} - N_{xy} \alpha_n^2 v_n(y) = Y_n \quad (4)$$

式(3), (4)にそれぞれ基本解 u_n^*, v_n^* を乗じて、 y 方向の全長 ℓ にわたって積分を行なった後、両式を足し合わせると

$$\begin{aligned} & [T_n(y) u_n^*(y, \xi) - u_n(y) T_n^*(y, \xi) + S_n(y) v_n^*(y, \xi) - v_n(y) S_n^*(y, \xi)]_{y=0}^{y=\ell} \\ & + h \int_0^{\ell} \{ N_{xy} \frac{\partial^2 u_n^*}{\partial y^2} + (N_1 + N_{xy}) \alpha_n \frac{\partial v_n^*}{\partial y} - N_x \alpha_n^2 u_n^* \} u_n(y) dy \\ & + h \int_0^{\ell} \{ N_y \frac{\partial^2 v_n^*}{\partial y^2} - (N_1 + N_{xy}) \alpha_n \frac{\partial u_n^*}{\partial y} - N_{xy} \alpha_n^2 v_n^* \} v_n(y) dy \\ & + h \int_0^{\ell} X_n(y) u_n^*(y, \xi) dy + h \int_0^{\ell} Y_n(y) v_n^*(y, \xi) dy = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $T_n^*(y, \xi) = h N_{xy} (\frac{\partial u_n^*}{\partial y} + \alpha_n v_n^*)$, $S_n^*(y, \xi) = h (N_y \frac{\partial u_n^*}{\partial y} - N_1 \alpha_n v_n^*)$ 。

このとき、基本解は以下の式の解である。

$$\left. \begin{aligned} N_{xy} \frac{\partial^2 u_n^*}{\partial y^2} + (N_1 + N_{xy}) \alpha_n \frac{\partial v_n^*}{\partial y} - N_x \alpha_n^2 u_n^* &= \overline{X_n} \cdot \delta(y, \xi) \\ N_y \frac{\partial^2 v_n^*}{\partial y^2} - (N_1 + N_{xy}) \alpha_n \frac{\partial u_n^*}{\partial y} - N_{xy} \alpha_n^2 v_n^* &= \overline{Y_n} \cdot \delta(y, \xi) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ただし、 $\delta(y, \xi)$ はデルタ関数を表わす。ここで、 $\overline{Y_n} = 0$ の場合の基本解を $u_n^{*(1)}, v_n^{*(1)}, \overline{X_n} = 0$ の場合の基本解を $u_n^{*(2)}, v_n^{*(2)}$ で表わすと式(5)は次式ようになる。

$$\begin{aligned} h \overline{X_n} u_n(\xi) &= [-T_n(y) u_n^{*(1)}(y, \xi) + u_n(y) T_n^{*(1)}(y, \xi) \\ &\quad - S_n(y) v_n^{*(1)}(y, \xi) + v_n(y) S_n^{*(1)}(y, \xi)]_{y=0}^{y=l} \\ &\quad - h \int_0^l X_n(y) u_n^{*(1)}(y, \xi) dy - h \int_0^l Y_n(y) v_n^{*(1)}(y, \xi) dy \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} h \overline{Y_n} v_n(\xi) &= [-T_n(y) u_n^{*(2)}(y, \xi) + u_n(y) T_n^{*(2)}(y, \xi) \\ &\quad - S_n(y) v_n^{*(2)}(y, \xi) + v_n(y) S_n^{*(2)}(y, \xi)]_{y=0}^{y=l} \\ &\quad - h \int_0^l X_n(y) u_n^{*(2)}(y, \xi) dy - h \int_0^l Y_n(y) v_n^{*(2)}(y, \xi) dy \end{aligned} \quad (8)$$

式(7), (8)において $\xi \rightarrow 0 + \epsilon$ 、 $\xi \rightarrow l - \epsilon$ としたときの ϵ (微小な正定数) $\rightarrow 0$ の極限を考えることにより、4本の方程式が得られる。これらの式の8個の境界未知量のうち4個については両端の境界条件より定まり、残り4個の未知量は4行4列のマトリックス方程式を解くことにより求めることができる。

3. 数値計算例

先に述べた解析方法に基づいて計算プログラムを作成し、数値解析を行った。表-1は、上辺等分布荷重 q を受ける2辺単純支持等方性矩形平板の中央点のたわみ、表-2は x 方向応力 σ_x の解析結果である。ここで、 $l_x = 100\text{cm}$ 、板厚 10cm 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ としており、 n は級数の項数である。また、表中には有限要素法 (FEM) による解析結果も示してある。

表-1 上辺等分布荷重 q を受ける2辺単純支持等方性矩形平板の中央点のたわみ

$$v = a(q l_x / N_x) \quad [x = l_x / 2, y = l / 2]$$

l / l_x	a	
	BSM	FEM
1.0	0.5113 (n=5)	0.5112
2.0	0.1195 (n=3)	0.1197
4.0	0.008501 (n=1)	0.008430

表-2 上辺等分布荷重 q を受ける2辺単純支持等方性矩形平板の x 方向応力

$$\sigma_x = a q \quad [x = l_x / 2, y = l / 5]$$

l / l_x	a	
	BSM	FEM
1.0	-0.3814 (n=13)	-0.3866
2.0	0.07001 (n=7)	0.06637
4.0	0.1559 (n=3)	0.1567

4. あとがき

本論文では、矩形平板の面内問題のみを取り扱った。同様な方法により面外問題に関しても解析を行っている³⁾ので、今後の課題としては面内面外両作用が共存するような立体的な構造物の解析にこの手法を拡張したい。

参考文献

- 堀部忠志：境界積分方程式法による長方形板の曲げ問題の一解法、境界要素法論文集 第5巻、pp. 143-148、1988
- 堀部忠志：弾性床上長方形平板の大たわみ問題の境界帯板法による解析、境界要素法論文集 第6巻、pp. 217-222、1989
- 出戸秀明、岩崎正二、宮本 裕 ほか：境界積分方程式法による矩形平板の曲げ応力解析、土木学会第47回年次学術講演会講演概要集、1-372、1992