I −24　構造解析に対する動的緩和法の適用に関する一考察

東北大学工学部　○学生員　玉田　善規
東北大学工学部　　正　員　中沢　正利
東北大学工学部　　正　員　倉西　茂

1. まえがき

静的構造解析のための数値解析手法として，微分方程式の差分表示に基礎をおいた動的緩和法[1]が紹介されて以来，その応用例も三次元の幾何学的非線形問題から材料非線形問題[2]まで多岐に渡り，かつ荷重・変位制御等の探査テクニックも駆使される様になってきた．この手法は擬似振動方程式を逐次代入により解くだけなので収束計算が途中で破綻することがない．また，減衰を数値的に与えることにより繰り返し計算の収束が保証される．さらに，材料非線形性の導入が非常に簡単であるという長所を持っている．しかし，解の収束が遅い，基本的に差分誤差を有するなどの短所も指摘されている．本研究では，この内包する差分誤差を減少させるために動的緩和法に対して荷重項に関する高精度差分式[3]を応用する手法を概説し，その効果を数値的に検証する．また，動的緩和法を用いて弾塑性構造解析を行なう場合の手法的な基礎的研究の一端を報告する．

2. 基礎理論

曲げ剛性 EI，初期たわみ $w_0(x)$ を有するはり一柱が，作用圧縮軸力 T と分布横力 $q(x)$ を受ける場合の横たわみ $w(x)$ に関する微分方程式は

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+T\frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x^2}=q(x), \qquad (1)$$

となる．仮想質量 m_w, m_u および仮想減衰係数 k_w, k_u を用い，モーメント一曲率関係を併用して振動方程式に直すと，

$$m_w\frac{\partial\dot{w}}{\partial t}+k_w\dot{w}=\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+N\frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x^2}+q(x), \qquad \dot{w}=\frac{\partial w}{\partial t}, \qquad (2)$$

$$m_u\frac{\partial\dot{u}}{\partial t}+k_u\dot{u}=\frac{\partial N}{\partial x}, \qquad \dot{u}=\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (3)$$

となる．ここで，M, N はそれぞれ断面力としてのモーメントおよび軸力である．長さ ℓ の両辺単純支持はりを仮定すると境界条件および初期条件は，

$$B.C.:\left\{\begin{array}{lllll} w & = & M=0 & \text{at} & x=0,\ell, \\ u & = & 0 & \text{at} & x=0, \\ N & = & -T & \text{at} & x=\ell, \end{array}\right. \qquad I.C.:\left\{\begin{array}{lll} N & = & -T, \\ u & = & -\frac{T}{EA}x, \\ \dot{w} & = & w=M=0, \end{array}\right.$$

となる．さらに式 (2,3) を時刻 $n\Delta t$ と場所 j のまわりに差分表示すると，

$$\dot{w}_{j,n}=\left(1-\frac{k_w\Delta t}{m_w}\right)\dot{w}_{j,n-1}+\frac{\Delta t}{m_w\Delta x^2}\left(M_{j+1}-2M_j+M_{j-1}\right)_{,n-1}$$
$$+\Delta t N_{j,n-1}\left\{(w_{j+1}-2w_j+w_{j-1})_{,n-1}+(w_{0,j+1}-2w_{0,j}+w_{0,j-1})\right\}+\frac{\Delta t}{m_w}q_j, \qquad (4\text{-a})$$

$$w_{j,n}=w_{j,n-1}+\dot{w}_{j,n}\Delta t, \qquad (4\text{-b})$$

$$\dot{u}_{j,n}=\left(1-\frac{k_u\Delta t}{m_u}\right)\dot{u}_{j,n-1}+\frac{\Delta t}{m_u\Delta x}\left(N_{j+1}-N_{j-1}\right)_{,n-1}, \qquad (5\text{-a})$$

$$u_{j,n}=u_{j,n-1}+\dot{u}_{j,n}\Delta t, \qquad (5\text{-b})$$

ここで，集中荷重 P を考慮するために，荷重に関する高精度差分式を

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+q(x)=0, \qquad (6)$$

に適用すると，$q(x)$ が一定勾配直線分布の場合には

$$\frac{1}{\Delta x^2}(M_{k+1}-2M_k+M_{k-1})+q_k+\frac{1}{\Delta x}P_k=0, \qquad (7)$$

として集中荷重を含めた形で評価できるため，式 (4-a) の最後の項を，

$$\frac{\Delta t}{m_w}\left\{q_j+\frac{1}{\Delta x}P_j\right\}, \qquad (8)$$

に代えればよいということになる．z^m を断面の中立軸からの距離とすると，断面力は断面内のひずみ ε から得られる応力 σ を積分することにより

$$\varepsilon_{j,n}^m = \frac{\partial u}{\partial x} - z^m \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{2\Delta x}(u_{j+1} - u_{j-1})_{,n} + z^m \frac{1}{\Delta x^2}(w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1})_{,n}, \quad \cdots\cdots (9)$$

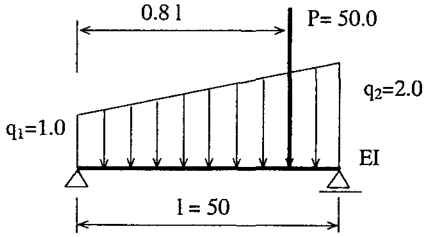
$$\sigma_{j,n}^m = E^m \varepsilon_{j,n}^m, \quad \cdots\cdots (10)$$

$$N_{j,n} = \int_A \sigma\, dA = \sum_m \sigma^m\, dA^m, \qquad M_{j,n} = \int_A \sigma z\, dA = \sum_m \sigma^m z^m\, dA^m, \quad \cdots\cdots (11)$$

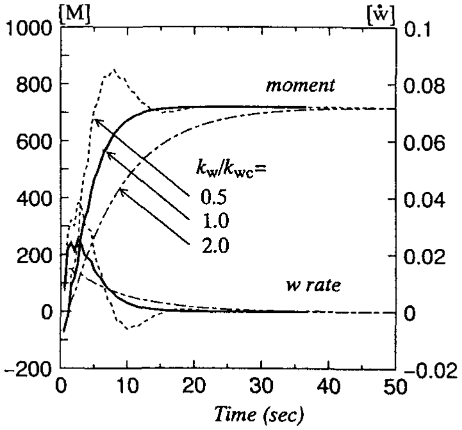
の様に求められ，時刻を $(n+1)\Delta t$ として振動しなくなるまで収束計算を繰り返す．材料の構成則は E^m の中でのみ考慮される．仮想質量を仮定した後，減衰係数は自由振動の臨界減衰係数 k_{wc} を基準にして設定される．

3. 数値例

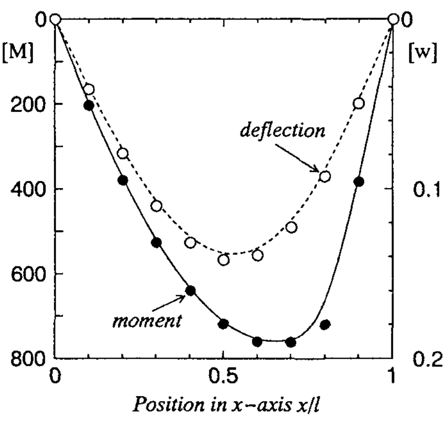
数値例として解析に用いた両端単純支持はりのモデルを 図−1 に示す．集中荷重と一定勾配を有する分布荷重の両方が載荷されている．はりの 軸方向分割数は 10 とした．図−2 は動的緩和法の収束過程を弾性はりに対して示したもので，たわみ速度 $\dot{w}$ が 0 に近づくにつれてモーメントも一定値に収束している．図中の各曲線は，はりの臨界減衰係数 k_{wc} を基準として異なる減衰係数を数値計算に用いた場合の収束状況をプロットしたものである．減衰係数が小さい場合には振動を起こし，大きい場合には収束が遅い．しかし，弾塑性の場合には最適減衰係数はこの臨界値の数倍必要であるという報告もある．図−3 は収束解と解析解の比較であるが，たわみ，モーメントとも良好な精度であることが実証されている．



図−1 集中荷重および不等分布荷重を受ける単純支持はりモデル



図−2 動的緩和法の収束過程



図−3 弾性解析解との比較

4. 展望

弾塑性問題の例等については当日発表するが，今後の研究展望としては，材料非線形問題の中でも解析が困難なひずみ軟化材料の場合に本手法が適用か否か，メリットはあるのか等を検討したいと考えている．

参考文献

1) Rushton,K R.: Dynamic-relaxation solutions of elastic-plate problems, *J. Strain Analysis*, Vol.3, No.1, pp.23–32, 1968.
2) Mikami *et al.*: Useful techniques for dynamic relaxation method, Technology Reports of Kansai Univ., No 27, pp.187–200, 1986.
3) 佐武 正雄：はりの高精度差分式について，土木学会論文報告集，第 165 号，pp.53–58, 1969 年 5 月．