Ｉ－17　　円弧ばりの横倒れ座屈問題

東北大学　学生員○後藤文彦
東北大学　正員　倉西　茂
東北大学　正員　岩熊哲夫

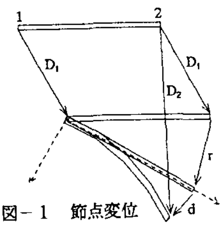
1.　まえがき

「円弧ばりの横倒れ座屈」は解析解が存在するという意味においても、空間骨組の面外不安定問題に対する最も標準的な検証問題であると言える。有限要素法で曲がりばりを折れ線近似した線形固有値解析では正しい座屈荷重が得られないことが既に知られており[1]、semitangential moment の考えを導入して幾何合成マトリクスを修正する方法[2]や変位関数を修正する方法[3]等の工夫が考案されている。本研究では、剛体変位除去法を導入し座標変換で有限な回転を厳密に表現することにより、より物理的に明解な非線形剛性方程式を定式化し、これを非線形固有値解析することにより座屈解析を行った。また、この手法では座屈前の面内変位の影響も考慮できることから、この影響を加味して修正した解析解との比較を行った。

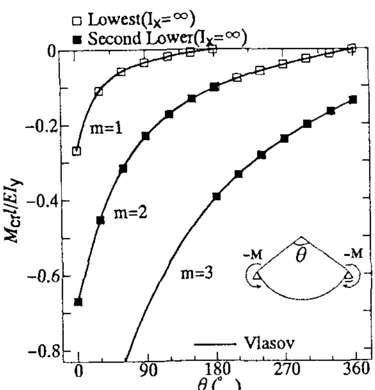
2.　解析手法

図－１のような直線棒要素の変形後の節点１の位置を原点とし、この点における変形後の部材接線方向に部材軸を取る局所座標系を考える。この局所座標系に対する、最終的な変形位置までの節点１の相対変位 $\boldsymbol{d}_1$ は零であり、節点２の相対変位 $\boldsymbol{d}_2$ は、節点１、節点２の絶対変位 $\boldsymbol{D}$ の関数として表せる。今、有限要素法の要素分割を前提とすればこの相対変位を十分小さくすることができるので、この局所座標系での節点力ベクトル $\boldsymbol{F}$ と節点相対変位ベクトル $\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2)^T$ を微小変位理論の剛性マトリクス $\boldsymbol{K}$ で関係付けることができる。一方、この局所座標系から全体座標系への座標変換は、節点１の有限回転角の関数として表される座標変換マトリクス $\boldsymbol{T}$ によって行う（但し有限回転角の記述には Euler 角を用いた）。すると、最終的には式(1)のような全体系の節点変位に関する非線形代数方程式が得られ、これを弧長法により繰り返し収斂計算する。

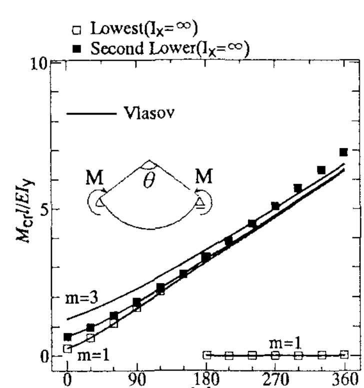
$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{D})\boldsymbol{K}\boldsymbol{T}^T(\boldsymbol{D})\boldsymbol{d}(\boldsymbol{D}) \qquad (1)$$



図－１　節点変位



図－２　円弧ばりの横倒れ座屈（負）



図－３　円弧ばりの横倒れ座屈（正）

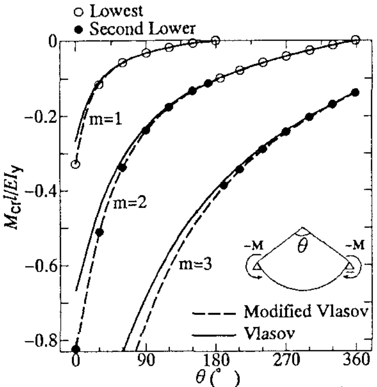
3.　数値解析

円弧ばりの横倒れ座屈を解析する。解析に用いる材料の諸元は、ヤング率 $E = 2.00000 \times 10^2 (GPa)$、せん断弾性係数 $G = 7.72000 \times 10 (GPa)$、部材軸長 $L = 1.02440 \times 10 (m)$、断面積 $A = 9.28800 \times 10^{-2} (m^2)$、強軸回りの断面二次モーメント $I_x = 1.13630 \times 10^{-4} (m^4)$、弱軸回りの断面二次モーメント $I_y = 3.87100 \times 10^{-5} (m^4)$、ねじり定数 $J = 5.89000 \times 10^{-7} (m^4)$、そりねじり定数 $I_\omega = 5.55869 \times 10^{-7} (m^6)$ とする。

(1)　座屈前の面内変位を無視した場合

まず Vlasov の解析解[4]と比較する目的で、座屈前の面内変位の影響が出ないように面内剛性を非常に大きくした円弧ばりを解析する。具体的には上の諸元のうち I_x のみを 10^6 倍大きくして解析した。負の等曲げを与えて数値計算した場合（図－２）、最低次の不安定点は開角 0° から 179° までは Vlasov の一次モードに重なり、181° から 359° ま

では二次モードに重なっている。二番目の不安定点は、開角 0° から 179° までは Vlasov の二次モードに重なり、181° から 359° までは三次モードに重なっている。正の等曲げを与えて数値計算した場合（図－3）、最低次の不安定点は開角 0° から 179° までは Vlasov の一次モードに重なり、181° から 359° までは二つ現われる Vlasov の一次モードのうち低い方に重なっている。二番目の不安定点は、開角 0° から 179° までは Vlasov の二次モードにほぼ重なるが、181° から 359° までは Vlasov の二次、三次モードよりも高めにずれている。

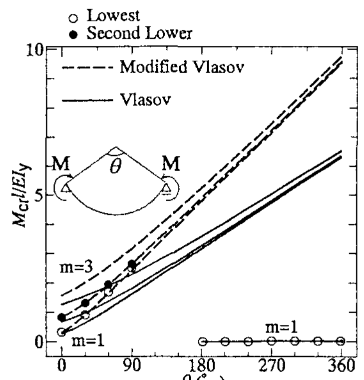


図－4　円弧ばりの横倒れ座屈（負）

(2)　座屈前の面内変位を無視しない場合

比較対象とする解を用意するために Vlasov の解析解を次のように修正する。曲率 $(1/R)$ の関数として与えられる座屈公式 $M_{cr} = f(1/R)$ に、座屈時の曲率 $(1/R_{cr})$ = 初期曲率$(1/R_0)$+面内変位による付加曲率 (M_{cr}/EI_x) を代入して M_{cr} について解くと、以下の式が得られる。

$$
\begin{aligned}
M_{cr} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (2)\\
a &= -1 + \frac{EI_y}{EI_x} + \left(\frac{1}{EI_x} - \frac{EIy}{E^2 I_x^2}\right)\left(\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}EI_\omega + GJ\right)\\
b &= \frac{1}{R}\left\{EI_y + \left(1 - 2\frac{EI_y}{EI_x}\right)\left(\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}EI_\omega + GJ\right)\right\}\\
c &= EI_y\left(\frac{n^2\pi^2}{\ell^2} - \frac{1}{R^2}\right)\left(\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}EI_\omega + GJ\right)
\end{aligned}
$$



図－5　円弧ばりの横倒れ座屈（正）

これを修正 Vlasov の解とする。先に示す諸元を有す円弧ばりを解析する。負の等曲げを与えて数値計算した場合（図－4）、最低次の不安定点は開角 0° から 179° までは修正 Vlasov の一次モードに重なり、181° から 359° までは二次モードに重なっている。二番目の不安定点は、開角 0° から 179° までは修正 Vlasov の二次モードに重なり、181° から 359° までは三次モードにほぼ重なっている。正の等曲げを与えて数値計算した場合（図－5）、最低次の不安定点は開角 0° から 90° までは修正 Vlasov の一次モードに重なるが、開角 120° から 179° では不安定点が現われる前に繰り返し計算が収束不能となるため、現段階では解を求められていない。開角 181° から 359° では二つ現われる修正 Vlasov の一次モードのうち低い方に重なっている。二番目の不安定点は、開角 0° から 90° までは修正 Vlasov の二次モードにほぼ重なるが、開角 120° 以上では前述の理由で解を求められていない。

4.　結論

面内に剛な円弧ばりの横倒れ座屈に対する本数値解は Vlasov の解析解によく一致した。また、面内に比較的柔な円弧ばりの横倒れ座屈に対する本数値解は、負の等曲げを受ける場合には修正 Vlasov の解とよく一致し、正の等曲げを受ける場合には開角の小さい領域で修正 Vlasov の解に一致した。以上から、本研究で提案した簡潔な定式化による面外不安定解析の可能性を示した。

参考文献

1) 林　正・岩崎英治. 幾何学的非線形解析における薄肉曲線材の折れ線近似の妥当性、土木学会論文集,No.392/I-9,1988.
2) Malla,K.,Kuranishi,S. and Iwakuma,T.: *Geometric Stiffness Matrix to Analyze the Lateral-Torsional Buckling of Curved Members*,JSCE,No.416/I-13,1990.
3) 林　正・岩崎英治: 立体骨組の有限変位解析の精密化、構造工学論文集,Vol 37A,1991.
4) Vlasov,V.Z.:*Thin-walled elastic beams*,Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1961.