Ⅰ－15　ＧＰとＡＨＰを利用した多目的構造最適化について

八戸工業高等専門学校　正会員　斉藤　進

１．まえがき

構造物の最適設計を多目的計画法によって実行している例はまだそれほど数多くなく、またそれらの例において、相競合する複数の目的の重要度をどのように評価して単一の解、すなわち最適設計を得るかについては確立した手法がない。本研究は３部材トラスの最適設計を例にとり、多目的計画法としてＧＰ（Goal Programming）を用い、さらに複数の目的の重要度をＡＨＰ（Analytic Hierarchy Process）によって決定する方法について述べたものである。

２．目的の重要度の評価

ＧＰでは目的（目標）の重要度を付順（優先順位をつけること）及び加重（同一の優先順位の場合に相対的な重みを与えること）によって表している。複数の目的に優先順位を付けることができる場合は問題がないが、優先順位が同等である場合には、重み係数を用いて重要度を評価することになる。本研究では、この重み係数の決定にＡＨＰの一部（評価基準の重み係数の計算）を用いる。本来ＡＨＰは評価基準や代替案が数量評価できない意志決定問題に適用される手法であるが、ここでは、複数の目的を評価基準、複数の解（設計）を代替案とみなしてＡＨＰを適用することになる。図１に示した３部材トラスの設計問題をＡＨＰにおける階層図で表したものが図２である。

３．３部材トラスの多目的最適化

図１に示したトラスにおいて、設計変数を部材断面積 $A_1=A_3$、A_2、作用応力度をσ_i、許容応力度をσ_{ai}、節点１の変位をδ、トラスの全体積を V とした時、原多目的計画法問題は次のように表わされる。

find　$\mathbf{A}=\{A_1、A_2\}$ ････(1)　so as to minimize　$F_1=\delta(\mathbf{A})$,

to minimize　$F_2=V(\mathbf{A})$ and to maximize　$F_3=-A_1+A_2$････(2)

subject to　$G_i=\sigma_i(\mathbf{A})-\sigma_{ai}\leqq 0$, $i=1,2,3$････(3)

$A_{min}\leqq A_1,A_2\leqq A_{max}$････(4)

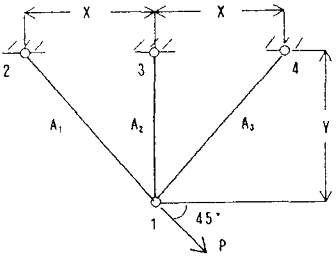

図１　３部材トラス問題

この問題をＧＰに変換すると

find　$\mathbf{A}=\{A_1、A_2\}$ ････(5)　so as to minimize

$\vec{a}=\{(p_1+p_2+n_3),(p_4),(p_5),(n_6)\}$ ････(6)

subject to　$G_1:\ \sigma_1+n_1-p_1=\sigma_{ta}$････(7a)

$G_2:\ \sigma_2+n_2-p_2=\sigma_{ta}$････(7b)

$G_3:\ \sigma_3+n_3-p_3=\sigma_{ca}$････(7c)

$G_4:\ \delta+n_4-p_4=\delta_T$ ････(7d)

$G_5:\ V+n_5-p_5=V_T$ ････(7e)

$G_6:\ -A_1+A_2+n_6-p_6=d_T$････(7f)

$A_{min}\leqq A_1,A_2\leqq A_{max}$････(8)

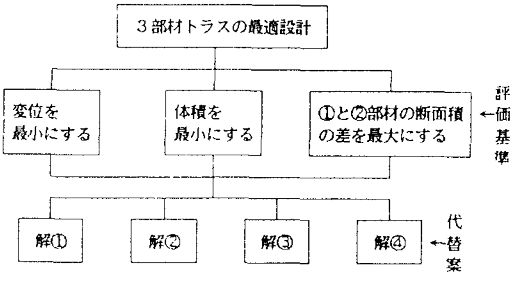

図２　３部材トラスの最適設計問題の階層図

上式において $\vec{a}$ は達成関数ベクトル、p_i、n_iは差異変数で、p_iは超過差異を、n_iは不足差異を表す。G_1～G_6は目標制約式であり、δ_T、V_T、d_T は、各々変位（最小化）、全体積（最小化）、部材断面積の差（最大化）の目標値である。

(6)式の達成関数は、$F_1\rightarrow min$、$F_2\rightarrow min$、$F_3\rightarrow max$の順で最小化あるいは最大化の優先度が付けられた場合の式であるが、優先順位を変えたい場合は差異変数を並べる順序を変えればよい。なお、（$p_1+p_2+n_3$）は、絶対制約式すなわち最優先で必ず０とならなければならない差異であり、部材の作用応力度が許容応力度を越えないことを示している。

4．ＡＨＰによる重み係数の決定

複数の目的に完全な優先順位がある場合は、(6)式のように達成関数を作れば良いが、多くの場合にはそのような絶対的な優先順位を与えることができない。このような場合、同じ優先順位に属する差異変数に重み係数を付けることによって、各目的の重要度に差をつけることができる。例えば３つの目的が同じ優先順位にあるが、その重要度が $F_1 \to \min$ に対して w_4、$F_2 \to \min$ に対して w_5、$F_3 \to \max$ に対して w_6（ただし $w_4+w_5+w_6=1$）とすると達成関数は

$$\bar{a} = \{(p_1+p_2+n_3),(w_4p_4+w_5p_5+w_6n_6)\} \quad \cdots\cdot(9)$$

とかける。この重み係数が有効に働くためには差異 p_4、p_5、n_6のオーダーを理想点を用いて揃えておかなければならない。理想点とは、その目的を最優先して満足させた場合の解のことである。図３において、$F_1 \to \min$ に対して①点、$F_2 \to \min$ に対して②点、$F_3 \to \max$ に対して③点が各々理想点である。w_4、w_5、w_6 の大きさを決めるにはＡＨＰを用いる。すなわち、各目的をＡＨＰにおける評価基準と考え、各目的に対する重み係数をＡＨＰにおける一対比較から求めることにする。例えば、$F_1 \to \min$ と $F_2 \to \min$ を１：３で $F_1 \to \min$ の方が重要、$F_1 \to \min$ と $F_3 \to \max$ を１：３で $F_1 \to \min$ の方が重要 、$F_2 \to \min$ と $F_3 \to \max$ を１：１の重要度とした場合、一対比較表及び各目的の重み係数は表１のようになる。①点、②点、③点、④点のような解をいくつか選び、これらをＡＨＰにおける代替案と考えて重み係数（総合評価）を計算することも可能である。

5．計算結果

計算のためのデータとして、X=Y=250cm、Px=25000kg、Py=-25000kg、σ_{ta}=1400kg／cm^2、σ_{ca}=-900kg／cm^2、E=2.1×10^{6}kg／cm^2、A_{min}=5cm^2、A_{max}=25cm^2，初期値A_1=A_2=20cm^{2}を与えて、計算を行った結果を図３、表２、表３に示す。図３に示した設計空間において、制約 G_1及びA_2の最小値、A_1、A_2の最大値によって囲まれるａｂｃｄ部分が許容領域である。すなわち、この領域内の点は設計点であり、達成関数の要素（$p_1+p_2+n_3$）を０とする点である。ケース４が３つの目的に優先順位が付けられず、表１のように一対比較値を与えて重み係数を求めた場合であり最適解は図３の④点となる。

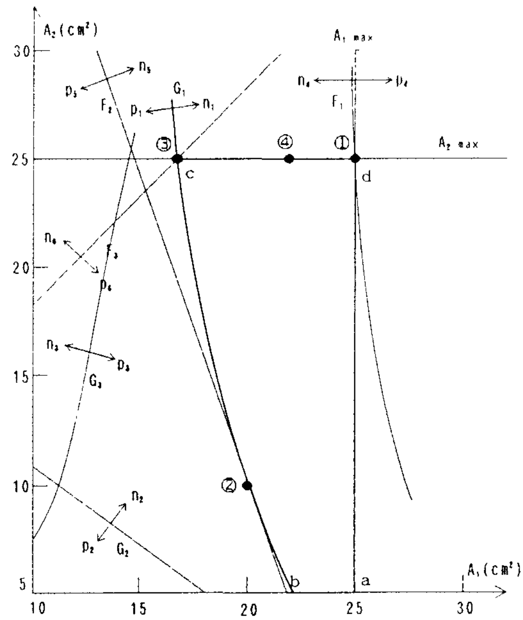

図３　　３部材トラス問題の設計空間図

表１　一対比較と重み係数の計算

	$F_1 \to \min$	$F_2 \to \min$	$F_3 \to \max$	幾何平均	重み係数
$F_1 \to \min$	1	3	3	2.080	0.600
$F_2 \to \min$	1/3	1	1	0.693	0.200
$F_3 \to \max$	1/3	1	1	0.693	0.200

表２　３部材トラスの最適設計計算結果（１）

ｹｰｽNO.	優先順位	重みの一対比較	最適解（cm^2）
1	$F_1 \to F_2 \to F_3$		①点　A_1=25.0　A_2=25.0
2	$F_2 \to F_1 \to F_3$		②点　A_1=19.9　A_2=10.3
3	$F_3 \to F_1 \to F_2$		③点　A_1=16.7　A_2=25.0
4	同等	$F_1:F_2$=1:3 $F_1:F_3$=1:3 $F_2:F_3$=1:1	④点　A_1=22.9　A_2=25.0

表３　　３部材トラスの最適設計計算結果（２）

ｹｰｽNO.	σ_1 (kg/cm^2)	σ_2 (kg/cm^2)	σ_3 (kg/cm^2)	δ (cm)	V (cm^3)	A_2-A_1 (cm^2)	収束回数
1	1000	586	-414	0.182	23900	0	4
2	1400	1026	-374	0.244	16700	-9.66	17
3	1400	680	-720	0.265	18000	8.32	4
4	1076	607	-469	0.198	22400	2.11	15

6．まとめ

以上、目的に絶対的な優先順位を与えることができない場合にＡＨＰによって相対的な重み係数を計算して与える方法を示した。このような方法は、一応の唯一解（最適解）を得る方法として有効であるが、依然、$F_i:F_j$ の一対比較を幾つにするかという問題が残り、これは意志決定者（設計者）に任されることになる。