

I - 11 変位仮定型の一般化高次理論による、すべりを伴う層状性複合板の曲げ解析

福島工業高等専門学校 正員 ○ 根 岸 嘉 和
同 学 生 西 沢 匡 人

1 緒 言 先に提案した層状性複合板に関する変位仮定型の一般化高次理論⁽¹⁾を、層間すべりを生ずる問題に向けて拡張し、解析例を示して精度の検証を行う。本理論は層ごとの変位を仮定し、層接合面での面外応力（層間応力）も未知量に採り入れることにより、層ごとの高次断面力のつり合い方程式と層接合面での変位の連続条件あるいはすべり条件を満足すると同時に、面外応力の不連続性を補う機能を備えている。

2 理論の定式化 解析対象とする層状性(N層)複合板の構造と座標系を図1(a), (b)に示す。

各記号の上付き括弧内数の $[k]: k=1, 2, \dots, N$ は層番号を、 $\langle k \rangle: k=0, 1, 2, \dots, N$ は境界面番号を表す。

理論構築の出発点として、各層の変位成分 $u_i^{(k)}$: $i=x, y, z$, を基準化層厚座標: ξ ($\xi=2z_k/h^{(k)}$) のべき級数展開(Mは理論次数)で次式のように仮定する。

$$u_i^{(k)} = \sum_{n=0}^{2N-1} u_{i(n)}^{(k)} \xi^n \quad \dots\dots\dots (1)$$

各層の応力成分 $\sigma_{ij}^{(k)}$ は、一般的な異方性まで考慮すると、次式の幾何-構成関係式で与えられる。

$$\sigma_{ij}^{(k)} = C_{ijkl}^{(k)} \{ (u_{k,i} + u_{i,k})/2 \}^{(k)} \quad \dots\dots\dots (2)$$

各層ごとの応力のつり合い方程式:

$$\{ \sigma_{\alpha j, \alpha} + \sigma_{z j, z} + f_j \}^{(k)} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

に ξ^n を重み関数として乗じ、層厚にわたる積分を実施する過程で、独立な未知量として、層接合面における面外応力（層間応力） $\sigma_{iz}^{(k)}$ を導入することにより、支配方程式として次式のような各層ごとの高次断面力のつり合い方程式が得られる。

$$\left\{ \frac{h}{2} \sigma_{\alpha j, \alpha}^{(n)} - n \sigma_{z j}^{(n-1)} + \frac{h}{2} f_j^{(n)} + F_j^{(n)} \right\}^{(k)} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

また、側端面における高次断面力あるいは変位係数に関する境界条件式が次式のように得られる。

$$n_\alpha \sigma_{\alpha j}^{(n)} \{^{(k)} = \bar{t}_j^{(n)} \{^{(k)} \quad \text{or} \quad u_{j(n)} \{^{(k)} = \bar{u}_j \{^{(k)} \quad \dots\dots\dots (5)$$

これらの各式において $\{^{(k)}$ の後の添字はその座標に関する偏微分を表す。また $\{^{(k)}$ 添字は x, y, z をとり、ギリシャ添字は面内座標 x, y をとるものとし、繰り返し添字には総和規約を適用する。

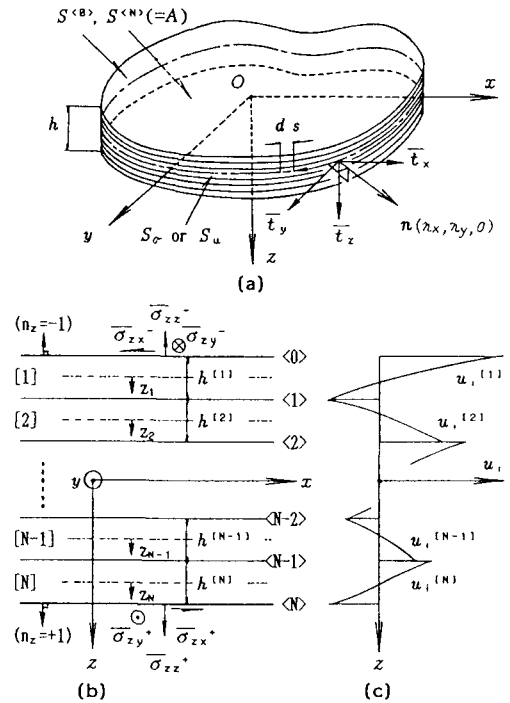


図1 層状性複合板、座標系および面内変位の仮定

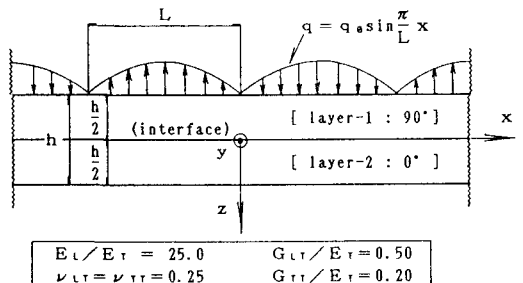


図2 正弦分布荷重を受ける2層クロスライ無限板

なお、式(4)、(5)に示した記号は次式で定義される各層ごとの高次モードおよび荷重項を表している。

$$\{\sigma_{ij}^{(n)}; f_i^{(n)}; \bar{t}_i^{(n)}\}^{(k)} = \int_{-1}^1 \{\sigma_{ij}^{(k)}; f_i^{(k)}; \bar{t}_i^{(k)}\} \xi^n d\xi,$$

$$F_i^{(n)} = [\sigma_{iz}^{(k)} \xi^n]_{-1}^1 = \sigma_{iz}^{(k)} - (-1)^n \sigma_{iz}^{(k-1)}, \dots \dots \dots (6)$$

ここに、 $f_i^{(k)}$ は物体力、 $\bar{t}_i^{(k)}$ は側端面荷重であり、荷重項 $F_i^{(n)}$ は未知層間応力 $\sigma_{iz}^{(k)}$ （表面においては荷重 $\bar{\sigma}_{iz}^-, \bar{\sigma}_{iz}^+$ ）によって構成されている。

本理論における他の支配方程式は、接合面における変位の連続条件式ならびにすべり条件式である。

すなわち、面外変位 u_z は全ての接合面で連続であり、図1(c)に示す面内変位 u_x に関しては一般の層接合面では連続とし、次式の連続条件式を適用する。

$$[u_j^{(k)}]_{\xi=+1} - [u_j^{(k+1)}]_{\xi=-1} = 0 \dots \dots \dots (7)$$

層間すべりを生ずる接合面においては、すべり量が層間応力 $\sigma_{xz}^{(k)}$ に比例する(すべり係数 μ)と仮定し、次式の滑り条件式を適用する。

$$[u_j^{(k)}]_{\xi=+1} - [u_j^{(k+1)}]_{\xi=-1} = \mu \sigma_{xz}^{(k)} \dots \dots \dots (8)$$

式(4)ならびに式(6)あるいは式(7)に、式(1)、式(2)を代入し整理することにより、支配方程式の具体形が得られる。なお、M次理論の未知量は、N層板の場合式(1)の変位係数： $u_i^{(n)}(k)$ が6NM個と層間応力： $\sigma_{iz}^{(k)}$ が3(N-1)個の合計6NM+3(N-1)個となる。

3 数値計算例 図2に示すような横等方性材料よりなる2層加スライ無限板(接合面のすべり係数 μ)に、正弦分布荷重： $q = q_0 \sin(\pi x/L)$ ； $L/h=2.0$ が作用した問題を各次数の理論で解析し、Mauの1次せん断変形理論⁽²⁾にすべりを考慮し拡張した理論および、すべりが考慮されているLu & Liuの高次せん断変形理論⁽³⁾による結果等⁽¹⁾と比較した。

図3と図4は $\bar{\mu} = \mu/(h/E_T) = 10$ で、すべりが生ずる場合の面内変位と面外せん断応力の厚さ方向分布を示し、図5は $\bar{\mu} = 10^{-4}$ で、すべりが生じない通常の場合の面外せん断応力の分布を示したものである。

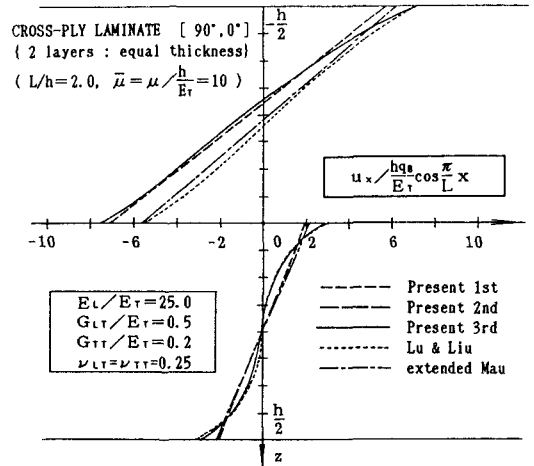


図3 面内変位 u_x の厚さ方向分布($\bar{\mu}=10$)

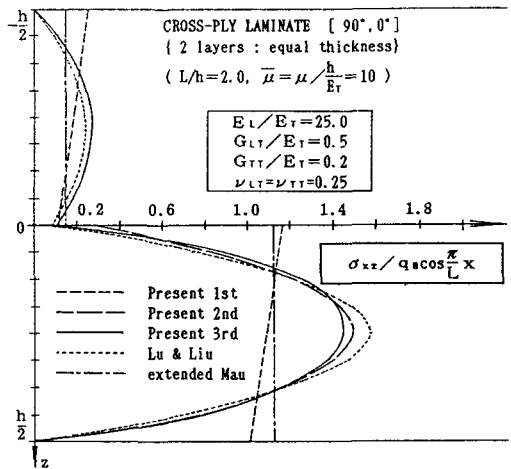


図4 面外せん断応力 σ_{xz} の厚さ方向分布($\bar{\mu}=10$)

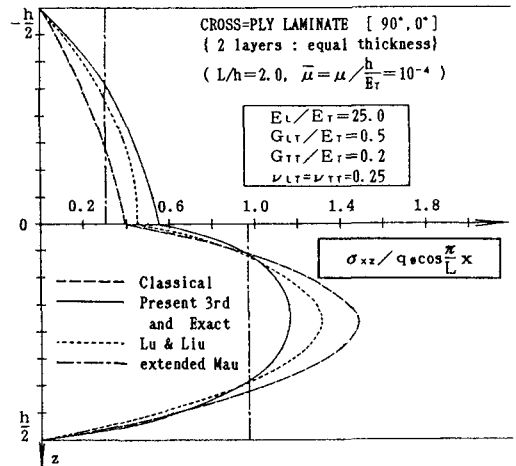


図5 面外せん断応力 σ_{xz} の厚さ方向分布($\bar{\mu}=10^{-4}$)

参考文献 (1) 根岸・平島：日本機械学会論文集(A編)，58巻，554号(1992)，pp. 161-168. (2) Mau, S. T. : J. Appl. Mech., Vol. 40 (1973), pp. 606-607. (3) Lu, X. & Liu, D. : AIAA J., Vol. 30, No4 (1992), pp. 1063-1073.