

I - 1 柔軟な梁の動的大変形挙動の1数値解法

東北大学 学生員 ○森 健二
 東北大学 正員 倉西 茂
 東北大学 正員 岩熊哲夫

1. まえがき

宇宙空間における展開構造物においては、外力や自重の影響が小さいために柔軟な材料が用いられることが多く、その挙動は大変位を生じる可能性が大きい。ここでは、2次元の動的有限変位問題に対して、剛体変位除去の手法によって剛性方程式と慣性項の評価をし、有限要素の定式化を行った。本報告では、これによって求められる運動方程式を用いて数値解析を行い、解析解のあるいくつかの解との比較によって、この手法の妥当性を検討する。

2. 変位場

x-y 平面上に Bernoulli-Euler の仮定及び断面形状不變の仮定を満足する棒を考える。変位場は次のように表される。¹⁾

$$\begin{aligned} u_x &= u + y \sin \lambda \\ u_y &= v + y(\cos \lambda - 1) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに u 、 v はそれぞれ x 、 y 軸の変位成分、 λ は軸の傾きである。この様子を図-1 に示す。

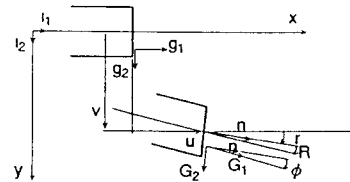


図-1 変位場

3. 剛体移動と実質変形

仮想仕事式に基づいた剛性方程式の誘導では、ある領域内の未知変位にある適切な関数を仮定し、仮想仕事式内の微分積分演算をした上で要素節点での各関数の値を未知数とする代数方程式に変換する。しかしここで考える長さ l の要素について得られる仮想仕事式内の未知変位は単純に関数を仮定できる形にはなっていない。そこで梁の内部に発生するひずみが微小であるという仮定を設ける。要素単位で考えると、大きく移動はするがそれ自体の伸びや曲率は小さくなる。従って、最終的なつり合い位置に到達するまでの挙動を

- 伸びも曲率も生じない並進・回転運動
- 要素自体の実質的な変形

の二つに分ける。そして、実質的な変形の部分を微小変位理論で扱うことで有限要素定式化を行う。

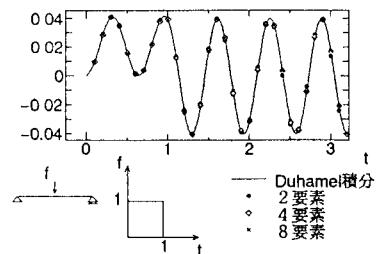


図-2 単純梁の中央に集中荷重をかけた場合

4. 数値解法

求められた運動方程式は節点自由度に関する非線形2階常微分方程式になる。

$$\{f\} = [T]^T [K] [T] (\{d_2\} - \{d_1\} - \{D\}) + [I] \cdots (2)$$

ここに $\{f\}$ は外力、 $\{f\}$ は回転を表すマトリクス、 $[K]$ は剛性マトリクス、 $\{d_1\}$ は要素左端の変位、 $\{d_2\}$ は要素右端の変位、 $\{D\}$ は要素の回転、 $[I]$ は慣性項である。ここで

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ R_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ r_i \end{Bmatrix} \cdots \cdots \cdots (3)$$

と、節点速度を新たな自由度として加えることにより1階の微分方程式に落とし、これを初期値問題と扱うことで有限変位問題を解析した。

単純梁の中央部に一定時間外力を与えた場合の問題をDuhamel 積分で直接解いた解と本解析を2要素、4要素、8要素で解いた結果の比較を図- 2に示す。要素の増加に従って解は改善されている。厳密解の周期を1とすると、各要素の誤差はそれぞれ-0.39%、-0.13%、-0.03%であった。

中央部の変位を拘束した梁の右端に外力を与えた場合の問題についての結果を図- 3に示す。これは過去の解析解とよい一致を示している。各直線は0.5秒間隔で梁の挙動を示したものであるが、その間隔から、中心軸に垂直な方向に振動しながら回転運動を指定する様子がうかがえる。

同様に左端の変位を拘束した梁の右端に外力を与えた場合の問題についての結果を図- 4に示す。これは1.0秒間隔の梁の挙動を示したものである。

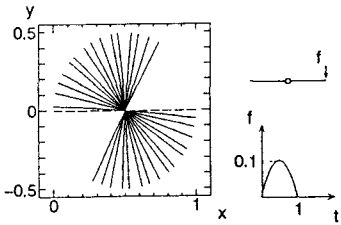


図-3 中央部の水平・垂直変位を拘束した梁の右端に荷重を与えた場合

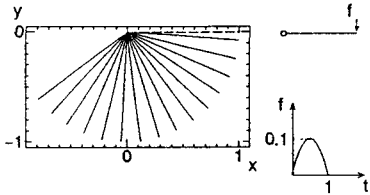


図-4 左端部の水平・垂直変位を拘束した梁の右端に外力を与えた場合

5. 結論

剛体変位除去の考えを用いて有限要素化して求めた離散運動方程式を、直接積分で解くことによって動的大変位問題を解析する手法が有効であることがわかった。ただし積分を行う際には、要素数や時間刻みを適切に選択しなければならない。

参考文献

1) Iwakuma,T Timoshenko beam theory with extension effect and its stiffness equation for finite rotation, *Computers & Structures*, vol.34, No.2, pp.239-250, 1990