Ⅳ－46　２次計画法の資源配分問題への適用

東北大学大学院　学生員 ○ 鬼柳　雄一
東北大学工学部　正　員　　徳永　幸之
東北大学工学部　正　員　　稲村　肇

1．はじめに

２次計画問題とは、「非負条件と１次の制約式に従う変数の２次式（目的関数）を最大（または最小）にする問題である。目的関数が２次式であることにより、線形計画法では扱うことが困難な、変数間の相互関係を含むような資源配分問題にも適用することができる。また、計算上も比較的簡単に厳密解が求まるため、非常に有効な方法である。

２次計画問題の解法にはいくつかあるが、本研究では、Kuhn－Tuckerの定理にもとづくWolfe の方法を用いる。これは、線形計画法における２段階法の考えを用い、シンプレックス法によって最適解を求めてゆく方法である。

本研究の目的は、資源配分問題の一例として航空機の運航スケジューリング問題を取り上げ、これに対する２次計画法の適用について考察することである。

2．２次計画問題に対するWolfe の方法

２次計画問題をベクトル表示すると、

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b} \tag{1}$$

$$\mathbf{x}\geq 0 \tag{2}$$

の制約のもとで、目的関数

$$f(\mathbf{x})=\mathbf{p}\,\mathbf{x}+\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{C}\mathbf{x} \tag{3}$$

の最小を求めることと表される。ただし、$\mathbf{A}$ はm×n要素のマトリックス、$\mathbf{x}$，$\mathbf{p}$ はn要素のベクトル、$\mathbf{b}$ はm要素のベクトル、$\mathbf{C}$ はn×n要素のマトリックスであり、' は転置を表す。

$f(\mathbf{x})$ が凸関数であれば、局所的最小は、全域的最小となることが保証されている。$f(\mathbf{x})$ が凸関数になるためには、$\mathbf{x}'\mathbf{C}\mathbf{x}$ が凸関数、すなわち$\mathbf{C}$が正値対称行列でなければならない。ここで目的関数と制約条件にラグランジュ関数を導入し、Kuhn-Tucher の定理を用いると、(1)～(3)式で表される２次計画問題は、(4)～(6)式のようにまとめられる。ただし、$\mathbf{v}$はn要素、$\mathbf{u}$ はm要素のベクトルである。

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b} \tag{4}$$

$$\mathbf{C}\mathbf{x}-\mathbf{v}+\mathbf{A}'\mathbf{u}=-\mathbf{p}' \tag{5}$$

$$\mathbf{v}'\mathbf{x}=0 \tag{6}$$

もし、(4)～(6)式を満足するような$\mathbf{x}$，$\mathbf{v}$ ，$\mathbf{u}$ があれば、この$\mathbf{x}$は２次計画問題の最適解を与える。

(4)～(6)式を満たす解を求めるためには、次のような手順を踏めばよい。

まず、$\mathbf{z}^1$，$\mathbf{z}^2$（n要素），$\mathbf{w}$（m要素）の人為変数を導入し(7)～(9)式のように表す。

$$\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{w}=\mathbf{b} \tag{7}$$

$$\mathbf{C}\mathbf{x}-\mathbf{v}+\mathbf{A}'\mathbf{u}+\mathbf{z}^1-\mathbf{z}^2=-\mathbf{p}' \tag{8}$$

$$\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{z}^1,\mathbf{z}^2,\mathbf{w}\geq 0 \tag{9}$$

第一段階として、初期の基底解には、$\mathbf{z}^1$，$\mathbf{z}^2$，$\mathbf{w}$ を選び、$\mathbf{v}$ を基底に入れない（０に保つ）ことに注意しながら、シンプレックス法を用いて、

$$\sum_{i=1}^{m} w_i \tag{10}$$

が０になるまで最小化する。ここで、$\mathbf{w}$ と、用いなかった$\mathbf{z}^1$，$\mathbf{z}^2$ の要素を除去する。

第二段階では、$\mathbf{v}'\mathbf{x}=0$（$\mathbf{x}$と$\mathbf{v}$は同時に基底に入れてはいけない）を考慮しながらシンプレックス計算を繰り返し、

$$\sum_{k=1}^{n} z_k \tag{11}$$

を最小化してゆく。$\sum_{k=1}^{n} z_k>0$ であれば計算を繰り返すが、これは多くとも $\binom{3n}{n}$ 回のイタレーションで $\sum_{k=1}^{n} z_k=0$ に達することがわかっている。$\sum_{k=1}^{n} z_k=0$ になったときのベクトルのセットが、この問題の最適解となっている。

3．航空スケジューリング問題の定式化

いま、考えうる全てのフライト案（駐機も含む）のセットが与えられ、そのフライト案が実現した場合の航空会社の利益が既知である、と仮定する。ここでまず、各フライト案に機材を割り当てるか割り当てないかを表す決定変数を設定する。これを、

$$x_{kij}^{h}=\begin{cases}1 & \text{割り当てる}\\ 0 & \text{割り当てない}\end{cases}$$
（h：機材，k：時刻
i：発空港，j：着空港）

と表し、それぞれのフライト案の運航利益をp^h_{kij}とすると、総運航利益は、

$$\sum p^h_{kij}\cdot x^h_{kij} \qquad (12)$$

で表わされる。

さらに運航利益として、乗継ぎ便の利用客による利益の増加がある。これは２つのフライト案が同時に実現したときに生じるものであるから、決定変数の２次式で表現できる。これをマトリックス$\mathbf{C}$で表すと、最大化すべき式（目的関数）は(13)式で表される。

$$f(x)=px+x'Cx \qquad (13)$$

この２次式$\mathbf{x'Cx}$の項においては全ての変数の組合せを考えているので、選択してはいけないフライト案の組合せも存在する。例えば、回送時間が足りない組合せや、母空港に戻らない組合せである。これには、負の罰金を$\mathbf{C}$に与えておくことにより制約を目的関数の中に取り込むことができる。

制約条件としては、各機材はある時間断面ごとに一つのフライト案を選択する、ということを立式する。

従って、この航空スケジューリング問題は(14)，(15)式のように定式化される。すなわち、

制約条件

$$\sum_k\sum_i\sum_j x^h_{kij}=1 \qquad (14)$$

のもとで、目的関数

$$f(x)=px+x'Cx \qquad (15)$$

を最大化することと表される。

４．２次計画法の適用における問題点

（１）目的関数の凸性

Wolfe の方法では最小化問題について考えているので、ここでは、

$$-f(x)=-px-x'Cx \qquad (16)$$

を最小化すればよいことになる。$\mathbf{-x'Cx}$ が凸関数、すなわち（$\mathbf{-C}$）が正定値でないと最適性が保証されないが、本定式化では、一般に（$\mathbf{-C}$）は正定値にならない。（$\mathbf{-C}$）の対角項に一律に値を与えることにより（$\mathbf{-C}$）が正定値になるようにすることはできる。しかし、この操作により関数形を歪めてしまうこともある。例えば、各フライト案の飛行時間が異なる場合には、飛行回数の多い解を選択しようとする。この値は、罰金や乗継ぎ利益の大きさに依存しており、その設定はまだ試行錯誤の状態である。

（２）解の整数化の問題

本定式化では、一般には、解は実数解となる。ここでは、あるフライト案を採択するかしないかの０－１整数問題であるため、分枝限定法によって解の整数化を行う必要がある。

５．適用例

ここで非常に小規模な例題への適用を考える。Ａ、Ｂの２空港間を１機が航行するものとし、航空機が出発できる時刻は午前１１時と午後２時の２回だけとする。フライトの所要時間は３時間とする。あるフライトが運航された場合の航空会社の利益を表－１のように仮定する。なお、ＡＢはＡ空港からＢ空港に運航することを表し、ＡＡはＡ空港にそのまま滞在することを示している。

表－１．運航利益

	ＡＡ	ＡＢ	ＢＡ	ＢＢ
AM11時	0	500	200	0
PM2時	0	200	300	0

本例題の計算の結果、表－２のような最適解を得ることができた。

表－２．計算結果

	ＡＡ	ＡＢ	ＢＡ	ＢＢ
AM11時	0.0	1.0	0.0	0.0
PM2時	0.0	0.0	1.0	0.0

６．おわりに

本研究では、２次計画法の資源配分問題への適用の一例として航空機の運航スケジューリング問題を定式化し、Wolfe の方法により小規模な例題を解いてみた。本定式化によると、目的関数が２次の項をもつことにより、乗継ぎ旅客の評価が可能となる。これは線形の目的関数では考慮できなかったことである。

しかし、第４章で述べたような問題点もあり、今後はそれらを解決してゆくことが必要となる。

◎参考文献◎

Philip Wolfe : THE SIMPLEX METHOD FOR QUADRATIC PROGRAMING, Econometrica,Vol.27,3,1959