

IV-36

四 辺 形 調 整

八戸工業大学 正会員 岩淵清行

1. まえがき

平成元年度の土木学会（全国）年次学術講演概要集に三角測量におけるいわゆる四辺形調整に関し、今井芳雄氏¹⁾が新しい計算式を書いておられた。私はそれを意識しながら平成二年（元年度）のこの東北支部会でコファクターを使つての方向補正法の紹介をした²⁾。その際方向補正法と角補正法との言うに難かしい優劣差異に関して質問があった。その質問にたいし私はうまく答えられなかった。それ以来その事についてずっと考えてきたし、また全国大会で権威者に聞いたりしてきたが、いまでも不明のままである。しかして、方向補正法と角補正法の結果のうち、はっきりわかる簡単な差異は、角の補正量の二乗和は（経験的に）角補正法の方が小さいということである。以下において昨年とおなじく²⁾

森忠次著測量学1基礎編にある問題の数値をかりて両方法の計算を条件方程式法で示す。千葉忠二著「測量のための最小二乗法」³⁾によるとその理論的証明は既になされているようであるがまだみていない。御教示をお願いします。

2. 与件

実際には経験則を言う為に与件をかえて数値計算を数千回やってみた。しかしここではあえて（まえがきに述べたように）昨年書いたものと同じものを示してある。記号番号は図1のごとし。四辺形ABCDにおいて点Aと点Bは既知点、CとDは未知点である。既知座標値はXA=0, YA=0, XB=1000m, YB=0とする。測線方向の観測値Hj（方向角では無いことに注意）は次の如く与えられている。（角の単位は、別に断わるまで、度分秒とする。）

A点で H3=0.0000, H2=16.2523, H1=48.2540
 B点で H12=0.0000, H11=49.2502, H10=83.3634
 C点で H9=0.0000, H8=64.2253, H7=94.5746
 D点で H6=0.0000, H5=50.5120, H4=133.0035

これから挟角 θ_i (1,2,3,...,8) は計算によって $\theta_1 = H_1 - H_2 = 32.0017$, $\theta_2 = H_{11} - H_{12} = 49.2502$, $\theta_3 = H_{10} - H_{11} = 34.1132$, $\theta_4 = H_8 - H_9 = 64.2253$, $\theta_5 = H_7 - H_8 = 30.3453$, $\theta_6 = H_5 - H_6 = 50.5120$, $\theta_7 = H_4 - H_5 = 82.0915$, $\theta_8 = H_2 - H_3 = 16.2523$

と間接的に求められる。方向Hiの観測精度はすべて等しいと仮定されている。

3. 方向補正法

方程式の計算の時は角はらじあん単位とせよ。直接観測値Hjの補正値を ΔH_j (j=1,2,...,12) とすると線形化された条件方程式は $[A][\Delta H] = [F]$ (1)

となる。[A]の要素は $C_i \equiv 1/\tan \theta_i$ として、次のようになる。

1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1
1	-1	0	0	-1	1	-1	1	0	0	1	-1
0	-1	1	-1	1	0	0	1	-1	1	-1	0
C1	-C1-C8	C8	C7	-C7-C6	C6	C5	-C5-C4	C4	C3	-C3-C2	C2

右辺[F]は

F1 $\equiv 2\pi - \sum \theta_i$	= -0.00016968782
F2 $\equiv \theta_5 + \theta_6 - \theta_1 - \theta_2$	= 0.0002617995623
F3 $\equiv \theta_7 + \theta_8 - \theta_3 - \theta_4$	= 0.00006302593368
F4 $\equiv 1/W - 1$	= 0.0003176758

ここに $W \equiv (\Pi \text{奇数} \sin \theta_i) / (\Pi \text{偶数} \sin \theta_j)$ である。さて (1) を

$\Omega \equiv 1/2 \times \sum (\Delta H_i)^2 - \lambda_1 \phi_1 - \lambda_2 \phi_2 - \lambda_3 \phi_3 - \lambda_4 \phi_4$ を最小ならしめる如くに解く。 λ_j はラグランジュの未定係数で、 ϕ_j ($j=1,2,3,4$) は線形化された条件方程式の左辺である。まず初めに正規方程式 $[N][\lambda] = [F]$ から λ を求める。ここに $[N] \equiv [A][A]^T$ であって $[\lambda]$ は $[N]^{-1}[F]$ で計算される。そして $[\Delta H] = [A]^T[\lambda]$ から観測方向の補正值が(秒単位にもどして) $\Delta H_1=3.656$, $\Delta H_2=-11.562$, $\Delta H_3=7.906$, $\Delta H_4=-4.924$, $\Delta H_5=-6.682$, $\Delta H_6=11.606$, $\Delta H_7=-9.489$, $\Delta H_8=5.510$, $\Delta H_9=3.979$, $\Delta H_{10}=-2.330$, $\Delta H_{11}=3.911$, $\Delta H_{12}=-1.580$ となる。挟角の補正秒 $\Delta \theta_i$ は $\Delta \theta_1=15.218$, $\Delta \theta_2=5.492$, $\Delta \theta_3=-6.242$, $\Delta \theta_4=1.530$, $\Delta \theta_5=-14.999$, $\Delta \theta_6=-13.289$, $\Delta \theta_7=1.758$, $\Delta \theta_8=-19.469$ である。この二乗和は1244秒秒である。

4. 角補正法

線形化された条件方程式は $[A][\Delta \theta] = [F]$

ここに $[A]$ の要素は方向補正法のとときと同じ記号で

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & & -1 & -1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & & 1 & 1 & & -1 & -1 \\ C1 & -C2 & C3 & -C4 & C5 & -C6 & C7 & -C8 \end{array}$$

また、右辺は完全に方向補正法の右辺と同じである。そして多くの参考書に書いてある計算にしたがって、挟角の補正秒 $\Delta \theta_i$ は $\Delta \theta_1=14.4992$, $\Delta \theta_2=6.7956$, $\Delta \theta_3=0.4120$, $\Delta \theta_4=-5.7072$, $\Delta \theta_5=-12.4231$, $\Delta \theta_6=-20.2819$, $\Delta \theta_7=-3.6120$, $\Delta \theta_8=-14.6830$ となる。この二乗和は1083秒秒である。

5. おわりに

以上の計算から、角補正法の挟角補正秒 $\Delta \theta_i$ の二乗和は、方向補正法の挟角補正秒 $\Delta \theta_i$ の二乗和より小さい事がわかる。

6. 参考文献

- 0) 今井；土木学会第44回年次会議概要集第4部、(平成元年)
- 1) 岩淵；土木学会東北支部発表会(平成2年3月)
- 2) 岩淵；土木学会東北支部発表会(平成3年3月)
- 3) 千葉；測量のための最小二乗法、山海堂

