

III-14

粒状体における双対性とその応用

東北学院大学 正員 佐武 正雄

1. まえがき

粒状体は、粒子と間隙とからなっている。2次元の場合、粒子と間隙のグラフは幾何学的に双対であり、粒子と間隙を伝わる力と変位のグラフは力学的に双対である。これらの双対性は、粒状体の離散力学の基本をなすものであることを説明する。

2. 幾何学的双対性

粒子と間隙のグラフの双対性について説明する。図-1に示すように、C点で接触する二つの粒子 P_1 、 P_2 の中心を結ぶベクトル（枝ベクトル）を l_c とし、図-2に示すように、C点で隣接する二つの間隙（破線に示すような双対粒子と考えることもできる） V_1 、 V_2 の中心を結ぶベクトル（双対枝ベクトル）を h_c とする。一つの粒子集合体（図-3（a））は、これらのベクトルを用いることによって、同図（b）のようなグラフに置換することができる（有向グラフであるが向きは省略している）。図中、実線は粒子グラフで、破線は間隙グラフである。粒子グラフの点、枝、ループは、それぞれ間隙グラフのループ、枝、点に対応しており、二つのグラフは互いに双対である。粒子グラフや間隙グラフは、粒子集合体の幾何学的性質を示しているため、この双対性を幾何学的双対性という。

いま、一つの接触点Cに関係する粒子 P_1 、 P_2 と間隙 V_1 、 V_2 がつくる4辺形領域 $P_1 V_1 P_2 V_2$ の面積 S_c は、 $\frac{1}{2} l_c \times h_c$ である。

3. 粒状体の離散的力学量

粒状体の最も一般的に考えられる離散的力学量は、表-1に示す6個の力の量と6個の変形の量である。粒子力（またはモーメント）は、通常の物体力（またはモーメント）であり、接触変位（または回転）は、接触点における2粒子の相対変位（または回転）をいう。また、間隙に関する量は、新しく導入したものである。

粒子、接触、間隙の力の量、変形量を、それぞれ、まとめて列ベクトルのかたちに

$$F_p = \begin{pmatrix} f_p \\ m_p \end{pmatrix}, \quad F_c = \begin{pmatrix} f_c \\ m_c \end{pmatrix}, \quad F_v = \begin{pmatrix} f_v \\ m_v \end{pmatrix}, \quad U_p = \begin{pmatrix} u_p \\ w_p \end{pmatrix}, \quad U_c = \begin{pmatrix} u_c \\ w_c \end{pmatrix}, \quad U_v = \begin{pmatrix} u_v \\ w_v \end{pmatrix} \quad (1)$$

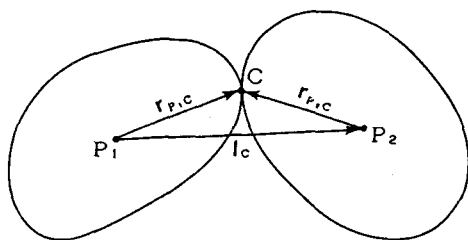
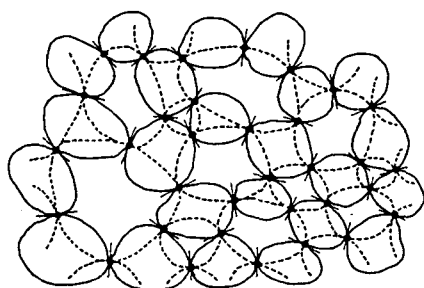


図-1



(a)

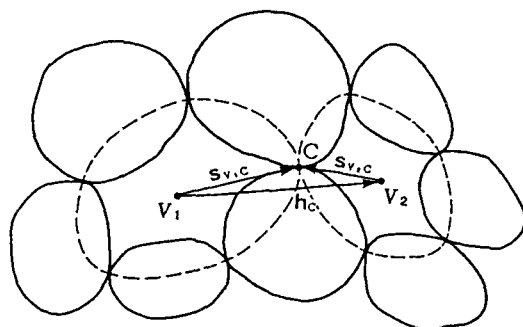
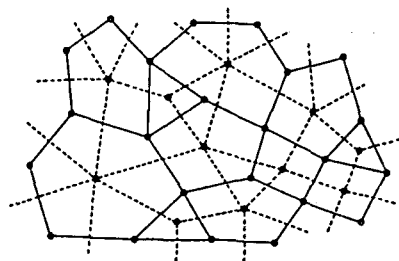


図-2



(b)

図-3

表-1

	particle	contact	void
force	f_p	f_c	f_v
couple	m_p	m_c	m_v
displacement	u_p	u_c	u_v
rotation	w_p	w_c	w_v

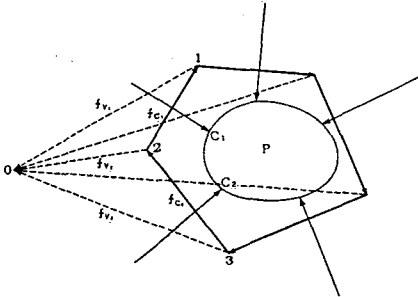


図-4

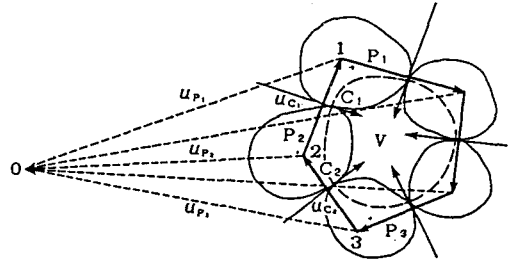


図-5

とすれば、一般化された接続マトリックス $\tilde{D}_{pc}$ 、ループマトリックス $\tilde{L}_{vc}$ を用いて、

$$F_p = -\tilde{D}_{pc} F_c, \quad F_c = -\tilde{L}_{cv} F_v \quad (2)$$

$$U_v = -\tilde{L}_{vc} U_c, \quad U_c = -\tilde{D}_{cp} U_p \quad (3)$$

と記することができる（繰り返される指標については和をとる）。恒等式

$$\tilde{L}_{vc} \tilde{D}_{cp} = 0, \quad \tilde{D}_{pc} \tilde{L}_{cv} = 0 \quad (4)$$

を考慮すれば、間隙力 F_v が存在するとき、粒子力 F_p は 0、また粒子変位 U_p から出発するときは、間隙変位 U_v は 0 となる。したがって、間隙力 F_v 、間隙変位 U_v は、それぞれ通常の連続体における応力関数、不適合度に対応していることがわかる。

このように、粒子と接触点だけでなく、間隙についても力学量を与えることによって、解析の系統化が可能となる。また間隙変位は、粒子力と同様に、適合状態を求めるイテレーションに応用することができる。

4. 力学的双対性

接触力 f_c 、接触変位 u_c は、それぞれ接触モーメント、接触回転がない場合、粒子、間隙についてループ（力の多角形 [図-4]、変位の多角形 [図-5]）をつくり、これらを連結してゆけば、接触力グラフ、接触変位グラフが得られる。この二つのグラフも互いに双対であり、一つの接触点 C において消費されるエネルギー W_c は、 $f_c \cdot u_c$ となっている。この双対性を力学的双対性という。

5. あとがき

本文では、粒状体において、粒子と間隙、および力と変位について双対性をもつグラフが導入され、これらが縦系と横系のように粒状体を形成していることを説明した。これらのグラフのもつ不規則性を統計幾何学的に表現し、解析に取り入れてゆくのが今後の課題であると考えられる。

参考文献

M. Satake: A Discrete-Mechanical Approach to Granular Materials, to appear in Int. J. Engng. Sci.