

II—77

抵抗に関する諸式の分類結果とその評価

日本大学工学部 正 員 藤 田 豊

日本大学工学部 正 員 安 田 禎 輔

1. まえがき

平均流速や損失水頭に関しては数多くの式が様々な形で提案されている。これらの式を損失水頭の形で表すと4つの型に分類できる。本報では「抵抗に関する諸式の形と分類法」によって、1775～1939年に提案された諸式を分類し、式の持つ意味や内容を検討し再評価を行う。

2. 諸式の分類結果と考察

表1はI型でDarcy-Weisbach型の式であり、表2はII型である。これらは基本的には粗面乱流の式であると考えられるが、実際はこれらの式で様々な領域の式が提案されている。また、I型はII型に比べ次元的に完成度が高く、歴史的にも新しい型の式である。しかし、I型の式で粗面乱流の式を提案しているものはPrandtl-Karmanの式を除きほとんどなく、遷移領域を含む混合型がほとんどである。逆にII型の式はPronyの式を除き全て粗面乱流型の式であり興味深い結果となっている。

Weisbachは現在Darcy-Weisbachの式と呼ばれているI型の式を最初に提案しているが、DarcyはWeisbachより12年遅れてI型ではなくII型の式を提案している。しかしEytelweinは本式をDarcyより61年前に提案しており、しかも本式はDarcyより82年早く提案されたChezyの式からも求められる。したがって、I型の式をDarcy-Weisbachの式と呼ぶのは歴史的に見て妥当ではなく、むしろ

Eytelwein-WeisbachまたはChezy

の損失水頭の式と呼ぶ方が妥当ではないかと考えられる。

表3はIII型の式であり、これらの式はReynoldsの指数関係： $x + y = 0$ の条件を満足しており、完全ではないが4つの型の式のうち最も次元解析的に完成度が高く一般式に最も近い。

表1. I型の式

第 I 型 ($m=1.0$)	$h = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$	$V = \sqrt{\frac{8g}{f}} \sqrt{RT}$	粗 面 乱 流 型
発 表 者	年	備 考	
Weisbach	1845	遷移領域型	
Weston	1890	遷移領域型	
Lang	1896	遷移領域型	
Biel	1907	遷移領域型 (ε : 定数)	
Nikuradse (Prandtl-Karman)	1932	粗 面 乱 流 滑 面 乱 流	
Colebrook-White	1939	遷移領域型 (全領域)	

表2. II型の式

第 II 型 ($m=1.0$)	$h = f_2 \frac{L}{D} V^2$	$V = \frac{2}{\sqrt{f_2}} \sqrt{RT}$	粗面乱流型 $f_2 = f / (2g)$
発 表 者	年	備 考	
Chezy	1775	粗面乱流型	
Eytelwein	1796	粗面乱流型	
Prony	1804	遷移領域型	
Darcy	1857	粗面乱流型	
Dupuit	1865	粗面乱流型 (Eytelwein)	
Bazin	1865	粗面乱流型 (開 水 路)	
Maurice-Ley	1867	粗面乱流型 (k : 定 数)	
Ganguillet-Kutter	1869	粗面乱流型 (開 水 路)	
Fanning	1878	粗面乱流型	
Frank	1881	粗面乱流型	
Sonne	1907	粗面乱流型	
Biegelein-Bukowsky	1914	粗面乱流?	

Blasiusの式はⅠ型の式の係数として提案されているが、 h について解けばⅢ型の式となる。本式は不完全ではあるが、Blasiusより59年前にHagenによって提案され、その後Flamantによっても提案されている。一般式で $m = 0.877$ またはReynoldsの式で $x = 2m = 1.75$ とおけば滑面乱流の式となるがBlasiusの式は一般式において $m = 0.875$ とした場合の式である。 $x = 1.75$ の値を示す式にはHagen, Reynolds, Flamant, Saph & Schoder およびBlasiusの式などがあるが、これを最初に示したのはWoltmannであるがⅣ型の式でやや不完全である。

表4はⅣ型の式でありReynoldsの指数関係： $x + y = 3$ の条件を満足せず次元的にやや不合理であり、 x の値も1.10～2.17と様々な値を示している。Nikuradseの実験からも明らかにように、 x の値は層流で1.0滑面乱流で約1.75、粗面乱流では2.0となる。

3. まとめ

以上を要約すれば以下の通りとなる。

- ① 抵抗に関する式はさまざまな形で表されているが、これらの式を摩擦損失水頭の形で表現し直すと4つの型に分類できる。
- ② 遷移領域を除く損失水頭の一般式をBuckinghamの π 定理によって求めると(1)式となる。本式に流れの条件を代入すれば各領域の式が得られ、特に層流においては従来の全ての式が得られる。
- ③ Ⅳ型の式は次元的に若干不合理な点がある。Ⅳ以外の式は一般式(1)より求められる。
- ④ 係数を変数とするならば、損失水頭はどんな形の式でも表すことができるが、その係数を完全に表すことができれば結局は(1)式に帰着させられる。Blasiusの式はⅠ型の係数として表されているが、これを变形すると $m = 0.875$ の場合の(1)式となる。
- ⑤ 現在のDarcy-Weisbachの式をDarcy-Weisbachの式と呼ぶのは歴史的にみて妥当でなくむしろEytelwein-WeisbachまたはChezy-Weisbachの式と呼ぶ方が妥当であると思われる。
- ⑥ Nikuradseの実験やBlasiusの式によると、滑面乱流におけるⅢ型の式の指数は $x = 1.75$ となる。この値は100～200年前にWoltmann, Hagen および Flamantらによって示されており、Blasius型の式はHagen, ReynoldsおよびFlamantなどの式より導くことができる。
- ⑦ Reynoldsは次元解析的にⅢ型の一般形としてその指数関係： $x + y = 3$ を求めたが、この関係は(1)式の指数関係と一致している。また、ReynoldsおよびFroudeの式を次元的に完成してやれば一般式(1)が得られる。

表3. Ⅲ型の式

第Ⅲ型 $2m = x$ $x + y = 3$	$h = \lambda_1 \frac{L}{D^y} V^x$	$V = \frac{1}{\lambda_1^{\frac{1}{\alpha}}} D^{3\alpha-1} I^{\alpha}$	$x \div 1.75$ の場合 滑面乱流
	$\lambda_1 = \frac{\lambda V^{2-x}}{\sqrt{2^x g}}$	$\alpha = \frac{1}{x}$	
発 表 者		年	備 考
Hagen		1854	滑面乱流
Reynolds		1883	一般式に最も近い
Flamant		1892	Hagen と全く同じ
Saph & Schoder		1903	Hagen と全く同じ
Hazen-Williams		1905	遷移領域
Blasius		1913	滑面乱流
Biegeleisen-Bukowsky		1914	遷移領域

表4. Ⅳ型の式、その他

第Ⅳ型 ($x + y = 3$)	$h = \lambda_2 \frac{L}{D^y} V^x$	$V = \frac{1}{\lambda_2^{1/x}} D^{y/x} I^{1/x}$	混合型 非合理的		
発 表 者	年	備考	発 表 者	年	備考
Woltmann	1791	滑面	Lea	1909	混合
Lampe	1873	混合	Brabee	1913	混合
Unwin	1886	混合	Mougnie	1914	混合
Thrupp	1887	混合	Scobey	1916	混合
Tutton	1889	混合	Tillmann	1919	粗面
Manning	1889	粗面	Beyerhaus	1921	粗面
Saph-Schoder	1903	粗面	Forchheimer	1923	粗面
Lawford	1903	混合	Wegmann-Aeryns	1925	混合
Vidal-Kauffman	1907	混合			
その他	合 理 的 : Froude (1872), 水路の全抵抗				
	非合理的 : Hamilton-Smith (1883), Kozeny (1920)				