

II - 56 Spectral 法による線形・非線形偏微分方程式の数値解析

東北学院大学 学生員 ○土田充  
 東北学院大学 正会員 河野幸夫  
 東北大学 正会員 今村文彦

1.はじめに

従来の方法である差分法では精度の高い数値計算結果を得るのは難しい。そこで本研究は、Fourier Spectral法によって線形偏微分方程式を数値解析した結果非常に精度が高いことが明かとなった。この方法を利用し非線形 Burgers方程式の数値解析を試みた。

2.線形 Burgers方程式の解法

(1) Fourier Spectral法による解法

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

ここで  $\nu$  : 動粘性係数 = 1

(1)式は、 $x$ 、 $t$ に関する偏微分方程式であるがこれにフーリエ逆変換式を代入することにより $t$ に関する常微分方程式となり $k$ に対して成立するため

$$\frac{\partial \hat{U}_{(k,t)}}{\partial t} - \nu (ik)^2 \hat{U}_{(k,t)} = 0 \quad (2)$$

が成り立つ。これは $t$ の1階の常微分方程式となる従って初期値  $\hat{U}_{(k,0)}$ を与えれば(2)式は解け、得られた値  $\hat{U}_{(k,t)}$ をフーリエ逆変換の式を用いて逆変換すれば解  $U_{(x,t)}$ が求められる。この方程式の $\nu$ を1と置いた常微分方程式を解くことになる。

(2) 解析結果

初期値としては  $\cos x \cdot \sin x$ を用いた。 $x$ の範囲は $-\pi$ より $\pi$ までとる。この時、 $N=8$ の場合は $dx=2\pi/N=\pi/4$ 、 $N=16$ の場合は $dx=2\pi/N=\pi/8$ 、 $N=32$ の場合は $dx=2\pi/N=\pi/16$ となる。図-1は  $\cos x$ ,  $n=8$ ,  $dt=0.1$  の場合の解析結果である。

(3) 厳密解との比較

$U_{(x,t)} = e^{-t} \cos x$  は偏微分方程式  $U_t = U_{xx}$ , 初期条件  $U(x,0) = \cos x$  の場合の厳密解であり、同様に、

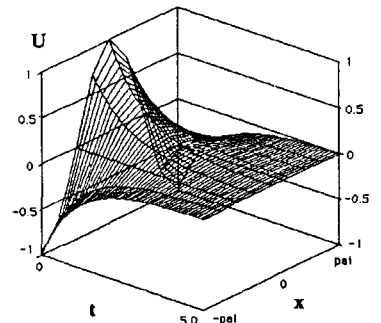


図-1 Result of Spectral method  
 $\cos x$ ,  $n=8$ ,  $dt=0.1$ , 3D

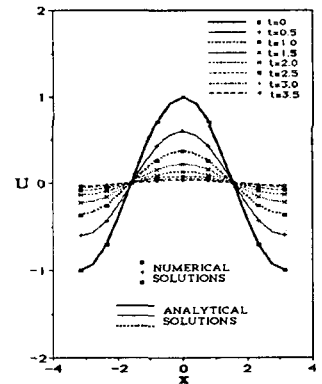


図-2 Analytical Solution and Numerical Solution  $\cos x$

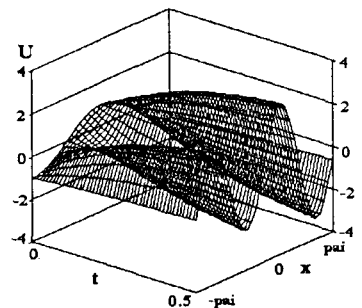


図-3 Result of Nonlinear PDE  
 $\cos x$ ,  $n=32$ ,  $dt=0.01$

$U(x,t) = e^{-t} \sin x$  は偏微分方程式  $U_t = U_{xx}$ , 初期条件  $U(x,0) = \sin x$  の場合の厳密解である。図-2は  $\cos x$  についての厳密解と Fourier Spectral 法による数値解とを2次元の  $u-x$  グラフ上で比較した結果である。これを見てもわかるように Fourier Spectral 法は非常に精度が高い。

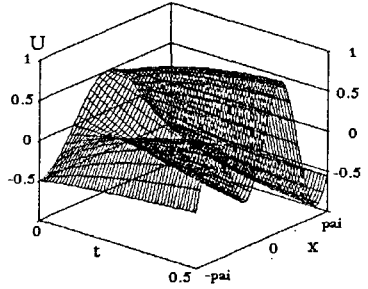


図-4 Result of Nonlinear PDE  
0.5 cos x, n=32, dt=0.01

### 3. 非線形 Burgers 方程式の解法

(1) Fourier Spectral 法による解法

非線形 Burgers 方程式は以下の通りである。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3)$$

これを線形と同じようにして解き、非線形項は  $V = \partial u \partial x$  と置くと

$$(\widehat{UV}) = \int_0^{2\pi} U V e^{-ikx} dx \quad (4)$$

となる。ただし有限 Fourier 変換を行なうと (4) 式は (5) 式となる。

$$\frac{d\widehat{U}}{dt} + \frac{1}{2}(ik) \sum_{k=p+q} \widehat{U}_p \widehat{U}_q + \nu k^2 \widehat{U} = 0 \quad (5)$$

(2) 解析結果

図-3は初期値  $\cos x$ ,  $n=32$ ,  $dt=0.01$  の場合のグラフである。図-4, 5は初期値  $C \cos x$  ( $C$ は係数) の場合のグラフで、 $C$ はそれぞれ 0.5, 0.1 である。 $C$ が大きい程、波の上下干渉は激しいことがわかる。また、積分をする回数だけ非線形項が大きくなるため時間がたつにしたがってその影響が大きくなり、初期値の係数  $C$  の2乗だけ影響を受ける。

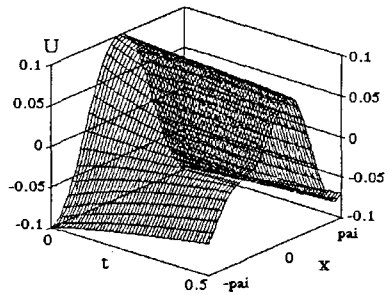


図-5 Result of Nonlinear PDE  
0.1 cos x, n=32, dt=0.01

### 4. おわりに

(1) Explicit 法および Implicit 法 (Crank Nicholson 法) および Fourier Spectral 法によって解析された数値解と厳密解とを比較した結果 Fourier Spectral 法によって得られた解が非常に高い精度で厳密解と一致することがわかった。

(2) Fourier Spectral 法によって非線形 Burgers 方程式を解析した。この方法による数値解は非線形項の誤差については含まれてしまうが (現在研究中) 線形項による誤差はほとんど含まれていない。

(3) これからの課題としては非線形項の誤差の縮小と非線形厳密解との比較検討である。

<参考文献>

- 1) 地震動のスペクトル解析入門
- 2) 物理とフーリエ変換
- 3) フーリエ解析と偏微分方程式