Ⅱ－53

成層二層流の数値モデルの精度

東北大学大学院　学生員○　長尾正之
東北大学工学部　正員　今村文彦
東北大学工学部　正員　首藤伸夫

1．はじめに

湾内の流動を解析する場合，温度や塩分による密度成層が無視できない．時として，湾の海水が，一夜にして交換する現象もあることが，これの定量評価には，成層モデルによる解析が必要となろう．本研究では，静水圧分布を仮定した二層モデルを考案し，その数値計算をおこなう．また，二層モデルの表面と界面の伝播特性を理論と計算で比較し，数値モデルの精度を比較する．

2．二層モデル基礎式

モデルは一次元とし，水深の変化はないものとする．モデルの対象となる領域と，その中で使用する用語を図-1に示した．ここで，η_1,η_2は水面，界面の水位変化，τ_{1s},τ_{2s}は上層と下層の水面と界面に働くせん断力，τ_{1b},τ_{2b}は上層，下層の底面に働くせん断力である．また，ρ_1,ρ_2は上層と下層の密度である．

2．1線形モデル

流体の連続の式，運動の式を各層で積分し，その時静水圧分布を仮定すると二層の積分モデルが得られる．ここで，　水面と界面での波高が層厚と比べて小さい場合には，非線形項が省略でき，次に示す線形モデルが得られる．

$$\frac{\partial(\eta_1-\eta_2)}{\partial t}+\frac{\partial M_1}{\partial x}=0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial t}+gh_1\frac{\partial \eta_1}{\partial x}=0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t}+\frac{\partial M_2}{\partial x}=0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial t}+gh_2\frac{\partial}{\partial x}\{\alpha\eta_1+(1-\alpha)\eta_2\}=0 \quad (4)$$

ここで，$\alpha=\rho_1/\rho_2$，M_1，M_2は，上層と下層の線流量である．

水深波長比が小さいときに，静水圧の仮定は成立するので，潮汐などによる海水交換の現象はこの式で説明できる．ここで，簡単のため境界に働くせん断力は，無視している．また，水面と界面の水位を次の(5),(6)式で与え，(1)～(4)式に代入すると，上層と下層の無次元位相速度の関係式，(7)が得られる．

$$\eta_1=\hat{\eta}_1\exp(i(k_1x-\sigma_1t)) \quad (5)$$

$$\eta_2=\hat{\eta}_2\exp(i(k_2x-\sigma_2t)) \quad (6)$$

$$F=\frac{(1-Y^2)((1-\alpha)-X^2)}{\frac{\alpha}{\beta}X^2}=1 \quad (7)$$

ここで，$X=\frac{c_2}{\sqrt{gh_2}}$，　$Y=\frac{c_1}{\sqrt{gh_1}}$，　$c_1=\left(\frac{\sigma_1}{k_1}\right)$，　$c_2=\left(\frac{\sigma_2}{k_2}\right)$，　$\beta=\left(\frac{h_1}{h_2}\right)$

上下層の伝播速度は独立ではなく，上式を満足させる必要がある．図-2は，上下層の無次元化位相速度Y,Xの関係式(7)を,内部パラメタとしてαを使って示す．均一流体(α=1)では，

$$Y=\sqrt{\frac{1+\beta}{\beta}}$$

となり，伝播速度は全水深で決まる．上層流体の密度が零(α=0)の場合には，X=1.0となり，伝播速度は，下層厚さで決まることがわかる．数値計算の検討では，計算による伝播速度が(7)式の左辺の値Fが1に収束するかどうかで精度を検討した．

2．2境界条件

図-1の場合，一次元伝播として左端から波を入射させ，右端で透過させる必要がある．透過境界は，境界のひとつ手前の位相速度を利用した特性曲線関係により設定できる．また，入射波条件として，上層と下層で波高と周期を与える必要があるが，これらの間には位相速度については(7)式の関係が成り立っているので，任意に選ぶことはできない．

このとき，境界条件は，x=0（入射境界）:水面では振幅1の孤立波を入力，界面では,(8)式で与えられる振幅で，上層と同位相の孤立波を入力する．x=L（L:水路長）（透過境界）:水面，界面ともに自由透過．

$$\hat{\eta}_2 = \frac{h_2}{\alpha h_1 + h_2} \hat{\eta}_1 \qquad (8)$$

(8)式はαが1に近いときに，(1)～(4)式を変形して得たものである．塩水楔の発達した感潮河川内とは異なり，湾内では淡水流入量が多くない．ここでは，主に温度成層により上下層の密度差が生じ，その値は小さいので，(8)式でかなり近似できるはずである．

3．数値計算と計算精度

2.で述べた線形化された二層モデルをLeap-Frog法で差分化し，数値的に解いた．また，空間格子間隔は0.5m，時間間隔0.5s，空間格子数200，時間ステップは300，境界は2.2に示した条件で計算した．数値計算は，全水深(h_1+h_2)を50mとし，表-1に示す7ケースについておこなった．そして，先に定義したパラメタFが1に近いかどうかを，時間ごとに調べ，計算の安定性を調べた．図-3にCase21～Case25の結果を，図-4にCase26～Case28のそれを示した．これをみると，計算の安定性に層厚比βはあまり関係ない．また，密度比αが1に比べ小さくなるほど，不安定になりやすいことがわかった．αが小さいと，上下層での位相速度に差が生じ，入力条件が難しくなることも，この原因のひとつである．

4．おわりに

積分二層数値モデルを提案し，その精度を検討した．この時，適切な境界条件を設定すれば，良好な結果を得ることがわかった．今後，現実の海域での湾内水交換現象に本モデルを適用する予定である．

表–1 実験条件

case	α	h_1(m)	h_2(m)	h_1/h
21	0.95	25	25	1.0
23	0.90	25	25	1.0
24	0.85	25	25	1.0
25	0.80	25	25	1.0
26	0.95	17	33	0.5
27	0.95	8	42	0.2
28	0.95	4.5	45.5	0.1

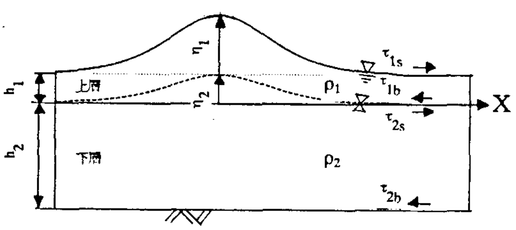
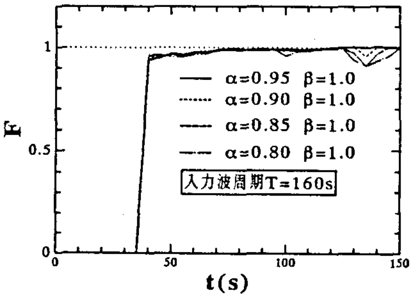


図-1 用語の説明



図–3 αを変化させ，βを一定にした場合

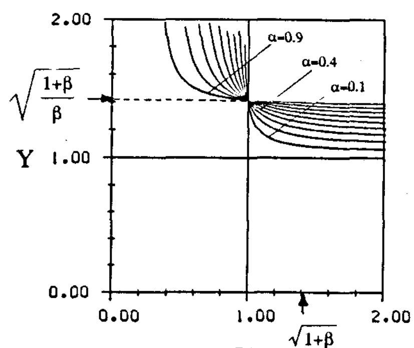
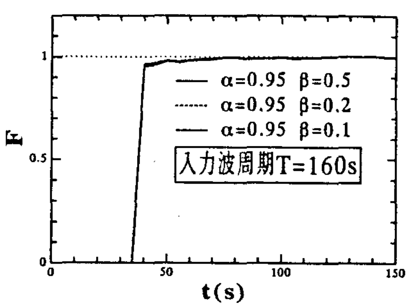


図-2 無次元化位相速度X,Yとα,βの関係



図–4 αを一定に，βを変化させた場合