

I—27

横倒れ座屈問題の再検討

東北大学 ○学生員 後藤文彦

東北大学 正員 倉西 茂

東北大学 正員 岩熊哲夫

1. まえがき

曲がりばりの横倒れ座屈に関して現時点で未解決の問題には次のようなものがある。①折れ線近似手法の妥当性：曲がりばりを直線要素で折れ線近似した有限要素解は正解を与えない場合があるという報告¹⁾がなされている。②座屈前の面内変位の影響：剛性の低いはりには面内に大きくたわんでから座屈することが知られており、直線ばりの横倒れ座屈に関してはTrahair et al.²⁾などがその影響を考慮した解析解を報告しているが、曲がりばりに関してはその影響が考慮された解は特に報告されていない。③半円弧ばりの座屈モーメント：半円弧ばりの横倒れ座屈形状は弦を軸とした回転であるが、この回転は境界条件が許す回転自由度に対応するので座屈モーメントは零にならなければならない。しかし数値解の比較対象として最も信頼して用いられるVlasov³⁾ (Fig.1)の解析解ですら正のモーメントを受ける半円弧ばりの座屈モーメントは零にならない。こうした問題を踏まえた上でここでは、剛体変位除去法によって有限要素化した直線要素の剛性方程式を用いた折れ線近似手法による数値解と、Vlasovの解析解およびその修正解とを比較検討した。

2. 解析手法

ここで用いた剛体変位除去法とは、極分解の定理に基づき、全変位から部材要素の実質変形に関与しない変位「剛体変位」を座標変換によって分離除去し、要素の剛体変位とともに移動する要素座標系での部材端力学量を、微小変位理論の剛性マトリクスによって表す方法である。この方法には、対象とする問題の変位の大きさに制約がないという利点がある。但し、3次元空間での有限回転角は、微小変位理論において扱っているように線形ベクトル空間上になく、その回転角成分を適切に定義することが重要である。そこで、部材左端に原点、部材軸に沿ってz-軸、部材断面内にx,y-軸をとる。まずy-軸右ねじ回りに γ だけ回転し、次にx-軸左ねじ回りに α だけ回転し、更に回転後のz-軸回りに ϕ だけ順々に回転したものととして三つの独立な回転角成分を定義する。この回転角成分を用いると有限な変位場は次式のように表される。

$$\begin{aligned} u_1 &= u(z) + x(\cos \phi \cos \gamma - \sin \phi \sin \alpha \sin \gamma - 1) + y(-\sin \phi \cos \gamma - \cos \phi \sin \alpha \sin \gamma) + \omega(x, y) \kappa_p \cos \alpha \sin \gamma \\ u_2 &= v(z) + x(\sin \phi \cos \alpha) + y(\cos \phi \cos \alpha - 1) + \omega(x, y) \kappa_p \sin \alpha \\ u_3 &= w(z) + x(-\cos \phi \sin \gamma - \sin \phi \sin \alpha \cos \gamma) + y(\sin \phi \sin \gamma - \cos \phi \sin \alpha \cos \gamma) + \omega(x, y) \kappa_p \cos \alpha \cos \gamma \quad (1) \end{aligned}$$

ここに $u(z), v(z), w(z)$ はz-軸のそれぞれの変位成分、 ω は断面の単位そり関数、 κ_p は軸のねじれ率である。

さて、有限要素法で要素分割した剛性マトリクスを重ね合わせるには、各要素の回転角成分が同一座標系で定義されていなければならないため、空間固定直角座標3軸回りの回転角成分を用いざるを得ない。この3軸回りの有限な回転角成分を数学的に定義することはできないが、増分の形で表すことができる。つまり、式(1)の変位場を用いて導いた仮想仕事式において、この3軸回りのモーメント外力と仕事をする回転角成分は、 α, γ, ϕ と次式のような関係で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \Delta \theta_x \\ \Delta \theta_y \\ \Delta \theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \gamma & 0 & \sin \gamma \cos \alpha \\ 0 & 1 & \sin \alpha \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta \gamma \\ \Delta \phi \end{bmatrix} \quad (2)$$

この関係を用いれば、直角座標3軸回りの有限回転角成分で表した剛性方程式を増分式の形で与えることができる。但し、式(1)から求めた剛体回転マトリクスは α, γ, ϕ の関数の形で与えられているので、接線剛性マトリクスを解いて得られる回転角成分の増分 $\Delta \theta_x, \Delta \theta_y, \Delta \theta_z$ から、式(2)の逆関係を用いて α, γ, ϕ の増分を求めていくことが必要である。こうした一連の繰り返し収束計算には、弧長法を用いた。

3. 数値解析例

以下に示す諸元を有すアーチの横倒れ座屈解析を行った(右図)。ヤング率 $E=2.00000 \times 10^8 \text{ Pa}$,せん断弾性係数 $G=7.72000 \times 10^7 \text{ Pa}$,軸長 $L=1.02440 \times 10 \text{ m}$,断面積 $A=9.28800 \times 10^{-3} \text{ m}^2$,強軸回り断面二次モーメント $I_x=1.13630 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ (or ∞),弱軸回り断面二次モーメント, $I_y=3.87100 \times 10^{-5} \text{ m}^4$,ねじれ定数 $J=5.89000 \times 10^{-7} \text{ m}^4$,そりねじれ定数 $I_\omega=5.55869 \times 10^{-7} \text{ m}^6$

(1) 座屈前面内変位を無視した場合

まず、面内変位の影響は除外して、面内剛性を無限大としたはりを解析した。開角の小さい範囲では本数値解は正負のモーメントを受ける場合ともにVlasovの解析解によく一致している。開角が大きい範囲では、負のモーメントを受ける場合の本数値解はVlasovよりも高めにずれてきているが、定性的にはVlasovと似た傾向を示している。一方、正のモーメントを受ける場合は、Vlasovが開角が大きくなっても単調に増加するのに対し、本数値解は開角 150° 付近を変曲点として減少している。

(2) 座屈前面内変位を考慮した場合

次に面内変位の影響を考慮した解析をするが、比較対象とする解析解を用意するためにVlasovの解析解を次のように修正する。つまり、曲率 $(1/R)$ の関数として与えられる座屈公式 $M_{cr}=f(1/R)$ に、座屈時の曲率 $(1/R_{cr})= \text{初期曲率}(1/R_0)+\text{面内変位による曲率}(M_{cr}/EI_x)$ を代入すると M_{cr} についての高次方程式が得られ、これを数値的に解いた解を修正Vlasovの解とする。開角の小さい範囲では本数値解は正負のモーメントを受ける場合ともに修正Vlasovの解によく一致している。開角が大きい範囲では、負のモーメントを受ける場合の本数値解は修正Vlasovよりも高めにずれてきているが、定性的には修正Vlasovと似た傾向を示している。一方、正のモーメントを受ける場合は、修正Vlasovが開角が大きくなっても単調に増加するのに対し、本数値解は開角 100° 付近を変曲点として減少している。

4. あとがき

円弧曲がりばりに対して面内変位の影響が考慮された横倒れ座屈解を、修正した解析解および本定式化により導くことができた。その結果、曲がりばりにおいても面内変位が座屈荷重に有意な差を与えることが分かった。曲率の小さい円弧曲がりばりの横倒れ座屈に対する本数値解は、既存の解析解に座屈前の変位を考慮して修正した解に一致した。このことから本定式化の折れ線近似手法が曲がりばりの解析に適用できる可能性が示された。正のモーメントを受ける場合の本数値解は、開角 180° で零にはならないものの、開角が 180° に近づくに連れて減少する傾向を示す。何れにせよ、本数値解を含め現時点で、開角の大きい円弧ばりの横倒れを正しく評価している解はないものと思われる。

参考文献 1)林正・岩崎英治:幾何学的非線形解析における薄肉曲線材の折れ線近似の妥当性、土木学会論文集、No.392/I-9,1988. 2)Vacharajittiphan,P.,Woolcock,S.T.&Trahair,N.S.:Effect of In-Plane Deformation on Lateral Buckling,j.Struct.Mech.,Vol.3.No.1,pp.29-60,1974. 3)Vlasov,V.Z. 奥村敏恵 外 共訳:薄肉弾性ばりの理論、技報堂、東京、1967

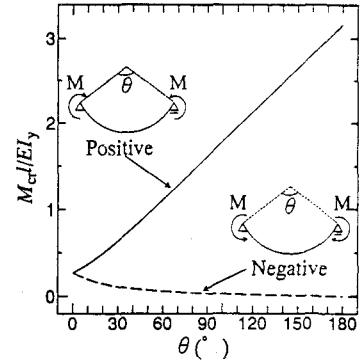


Fig.1 Critical Moment by Vlasov

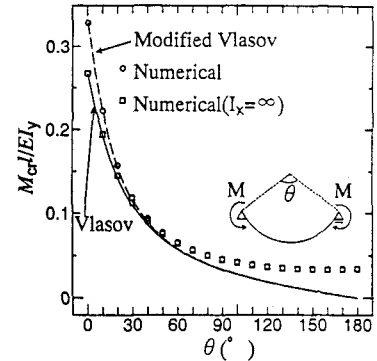


Fig.2 Critical Negative Moment

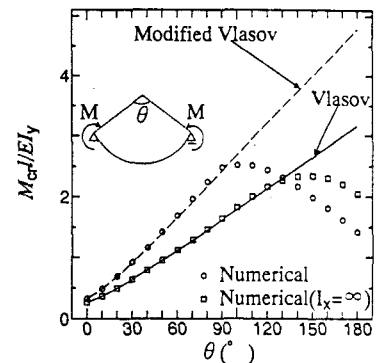


Fig.3 Critical Positive Moment