

I-26

種々の境界および荷重条件を考慮した板の
線形座屈解析法

東北大学工学部 ○学生員 横幕 清
 東北大学工学部 正 員 中沢 正利
 東北大学工学部 正 員 倉西 茂

1. まえがき

これまで板に関しては種々の境界および荷重条件の下での線形座屈解が多数発表され、公式集等¹⁾にも列挙されている。しかしそれらは異なる研究者が個々に異なる形状関数を用いて求めたもので、精度が不明である上に単純な場合しか解けない。また一般に板の構造解析においては周辺境界条件が不明確なため、上下界（例えば単純支持と固定）での座屈強度を明らかにしておく必要があり、かつ複数の境界条件を統一的に等しい精度で扱えることが望ましい。荷重条件についても単独荷重の載荷は稀であり、連成座屈強度を精度よく解析する必要がある。そこで本研究では種々の境界条件に対して振動解より得られる変位関数が統一的に表現し得ることに着目し、境界条件のみならず種々の荷重条件をも統一的に考慮できる板の線形座屈解析法を開発したので報告する。

2. 基礎理論

梁の自由振動理論から得られる変位関数²⁾は、面外たわみ $w(x, y)$ の形を

$$w(x, y) = t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} f_m(x) g_n(y), \quad \begin{cases} f_m(x) = h_i(z) \text{ for } i = m, & z = x, \ell = a, \\ g_n(y) = h_i(z) \text{ for } i = n, & z = y, \ell = b, \end{cases} \quad \dots (1)$$

$$h_i(z) = c_1 \sin\left(\frac{\beta_i z}{\ell}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\beta_i z}{\ell}\right) + c_3 \sinh\left(\frac{\beta_i z}{\ell}\right) + c_4 \cosh\left(\frac{\beta_i z}{\ell}\right), \quad \dots (2)$$

とにおいて x, y 方向とも共通の変位関数で表わす。ここで、 $c_1, \dots, c_4$ および β_i は表-1に示す種々の境界条件および対応した振動数方程式から決まる係数である。図-1に示す二軸方向の不等曲げ、軸力、せん断を全て表現できる応力関数 Φ ³⁾ は、 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ をそれぞれ x 方向作用曲げ応力、 y 方向曲げ応力、せん断応力として、

$$\Phi = \sigma_{x2} \left[\omega \cdot xy - \frac{1}{6b} (\alpha_x y^3 - 3by^2) \left\{ \gamma_x + (1 - \gamma_x) \frac{x}{a} \right\} - \frac{\kappa}{6a} (\alpha_y x^3 - 3ax^2) \left\{ \gamma_y + (1 - \gamma_y) \frac{y}{b} \right\} \right], \quad \dots (3)$$

ここで α_x, α_y は曲げと軸力の比、 γ_x, γ_y は不等曲げ比、 ω は曲げとせん断の比、 κ は x と y 方向応力比を示し、

$$\alpha_x, \alpha_y = \begin{cases} 0 & \text{uniform normal stress,} & \gamma_x \equiv \sigma_{x1}/\sigma_{x2}, \\ 2 & \text{pure bending,} & \gamma_y \equiv \sigma_{y1}/\sigma_{y2}, \\ < 2 & \text{bending and compression,} & \omega \equiv \tau_{xy}/\sigma_{x2}, \\ > 2 & \text{bending and tension,} & \kappa \equiv \sigma_{y2}/\sigma_{x2}, \end{cases} \quad \dots (4)$$

のパラメータで定義する。座屈点近傍でのひずみエネルギー増分 ΔU および外力増分 ΔT は、

$$\Delta U = \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - (1 - \nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy, \quad \dots (5-a)$$

$$\Delta T = \frac{t}{2} \int_0^b \int_0^a \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} dx dy, \quad \dots (5-b)$$

で表わされ、固有値問題として $\Delta U = \Delta T$ なるうちの最小の荷重が座屈荷重として求められる。

表-1 種々の境界条件 (b.c.: 12 は x, y 方向の境界条件がそれぞれ 1, 2 であることを意味する。)

No.	Condition	Equation	No.	Condition	Equation
1	both sides s.s.	$\beta_i = i\pi$	4	cantilever edge	$\cos(\beta_i) \cosh(\beta_i) + 1.0 = 0$
2	both sides clamped	$\cos(\beta_i) \cosh(\beta_i) - 1.0 = 0$	5	s.s. and free	$\tan(\beta_i) - \tanh(\beta_i) = 0$
3	clamped and s.s.	$\sin(\beta_i) \cosh(\beta_i) - \cos(\beta_i) \sinh(\beta_i) = 0$	6	both sides free	$\cos(\beta_i) \cosh(\beta_i) - 1.0 = 0$

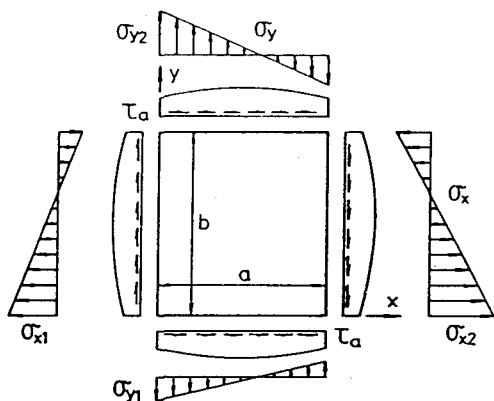


図-1 パネルに作用する外力

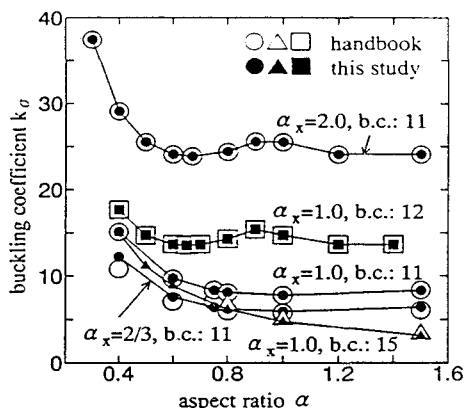


図-2 解析解との比較

3. 精度検証および解析例

b_{mn} の採用項数と精度の関係を調べた結果、 5×5 で充分であることが分かり、以後の解析は全てこの項数で行なった。境界条件が変化する場合に対して曲げと軸力を受ける板の既存の解析解¹⁾と数値解を図-2で比較し、十分な精度で解析可能なことを検証した。図-3は各種境界条件下で x 軸方向の不等曲げとせん断を受ける板の解析例であるが、b.c.: 11 で最も安全側の評価を与える等曲げ载荷は b.c.: 12 では危険側となることから、境界条件の影響を正確に把握する必要があることが示唆される。同じく図-4に示す b.c.: 13 の場合でも圧縮される辺が異なる場合に、その違いが圧縮強度および γ_x の影響に現われてくる。

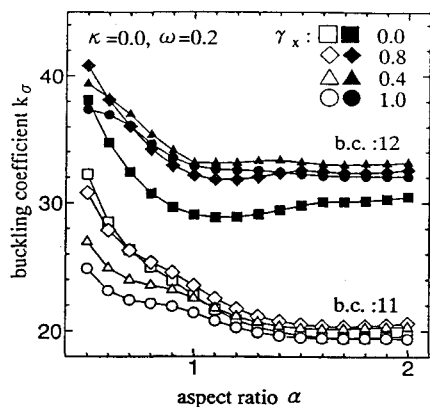


図-3 不等曲げとせん断を受ける板の座屈 ; b.c.: 11, 12

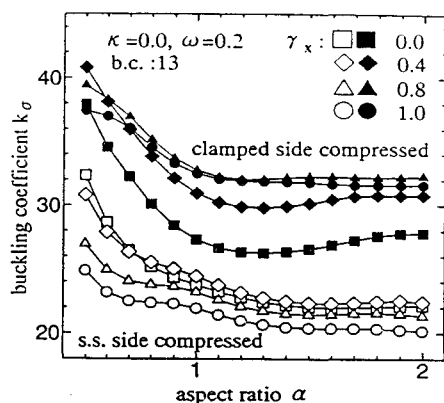


図-4 不等曲げとせん断を受ける板の座屈 ; b.c.: 13

4. まとめ

種々の境界および荷重条件を統一的に等しい精度で解析可能な線形座屈解析法を開発した。本理論に基づいたプログラムでは、現在 21 種類の境界条件（一軸あたり 6 種）で、二軸方向の不等曲げ、軸力、せん断を統一的に考慮可能である。

参考文献

- 1) Ed. by CRC Japan: Handbook of Structural Stability, Corona Pub. Co. LTD. 1971.
- 2) 西岡 隆: 構造振動解析, 培風館, pp.85, 1987.
- 3) Nakazawa *et al.*: Elastic buckling strength and post-buckling ..., Proc. JSCE, No.428/I-15, pp.29-38.