

I-24

複合材料の平均弾予測の一方

東北大学工学部	○学生員	木谷朋之
東北大学工学部	正 員	岩熊哲夫
東北大学工学部	正 員	倉西 茂

1. まえがき

現在、鋼構造工学の分野においても、より合理的に定めた安全率に基づく終局強度設計法が採用されつつある。このような現状において、その終局状態を支配する大きな要因のひとつが材料非線形性の問題であろう。さらに、構造物の終局状態はほとんど塑性状態であり材料非線形性に大きく左右されることを考えると、塑性域も含めた複合材料の巨視的構成則の研究は設計自体にも非常に重要であると考えられる。そこで本研究では「森-田中理論¹⁾」を増分形式で表わされた弾塑性材料の支配方程式に適用することによって、複合材料の弾塑性挙動を解析した。

2. 材料モデルと平均化手法

複合材料の巨視的な挙動は非常に複雑になるが、微視的な観点からみると非常に簡単な構成モデルで表現できる。ただし、ここでは微小変形理論の枠内だけで議論をする。それぞれの材料は弾性域では Hooke の法則で表われ、初期降伏判定は一般的に用いられている von Mises の降伏条件に従うとする。降伏後の挙動は関連流れ則である Prandtl-Reuss 式の増分関係でモデル化できるとする。対象領域はほとんど無限体とし、介在物の体積比率を f 、母材と介在物の弾塑性係数をそれぞれ $\underline{C}_m$ 、 $\underline{C}_i$ で表わし介在物は 1 種類の材料でできた楕円体とする。無限遠方場で平均的な外力として ($n \underline{g}^0$) の増分表面力が作用した問題を考える。介在物が全く存在しない場合の一律なひずみ増分を $\underline{\varepsilon}^0$ とすると、介在物が存在することでひずみ・応力ともにその分布は乱れる。系全体のひずみ場の乱れを $\underline{\varepsilon}_0$ としここに新たにある特定の 1 個の介在物を導入した場合の周辺に発生するひずみを $\underline{\chi}$ で表わす。すると、母材及び介在物中に発生する平均的な応力の乱れ増分を $\underline{\sigma}_m$ 、 $\underline{\sigma}_i$ で表すと、それぞれの領域で次のような平均応力-ひずみの増分関係が成立する。

$$\underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma}_m = \underline{C}_m (\underline{\varepsilon}^0 + \underline{\varepsilon}_0) \quad \text{IN MATRIX}, \quad \underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma}_i = \underline{C}_i (\underline{\varepsilon}^0 + \underline{\varepsilon}_0 + \underline{\chi}) \quad \text{IN INCLUSION} \quad (1)$$

ここに、 $\underline{\chi}$ は介在物内平均を表わす。介在物にアイゲンひずみを適用する等価介在物法^{2), 3)}を式(1)に用いると、複合材料の巨視的な構成関係とそれぞれの領域での平均応力場は次式のようにになる。

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = [\underline{C}_m - (\underline{C}_m - \underline{C}_i) \{ \underline{S} - f (\underline{S} - \underline{I}) \}]^{-1} \{ \underline{C}_m - (1-f) (\underline{C}_m - \underline{C}_i) \underline{S} \} \underline{C}_m^{-1} \underline{\sigma}^0 \quad (2)$$

$$\underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma}_m = \underline{\sigma}^0 - f \underline{C}_m (\underline{S} - \underline{I}) [\underline{C}_m - (\underline{C}_m - \underline{C}_i) \{ \underline{S} - f (\underline{S} - \underline{I}) \}]^{-1} (\underline{C}_m - \underline{C}_i) \underline{C}_m^{-1} \underline{\sigma}^0$$

$$\underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma}_i = \underline{\sigma}^0 + (1-f) \underline{C}_i (\underline{S} - \underline{I}) [\underline{C}_m - (\underline{C}_m - \underline{C}_i) \{ \underline{S} - f (\underline{S} - \underline{I}) \}]^{-1} \times (\underline{C}_m - \underline{C}_i) \underline{C}_m^{-1} \underline{\sigma}^0 \quad (3)$$

ここで $\underline{S}$ は母材のポアソン比を用いた Eshelby⁴⁾ のテンソルである。またこの結果は無限遠方場で平均的なひずみ場を与えた場合の結果と完全に一致する。しかし式(2), (3)から明らかなように、この場合には母材の弾性塑性係数の逆行列が必要になり、もし母材が完全弾塑性体で介在物よりさきに降伏する場合には上式の算定法を用いることが不可能になる。そこで次のような拡張を行なう。母材を介在物と同じ材料で置き換えると同時に母材のみにそれに対応したアイゲンひずみを分布させる。この手法を用いると複合材料の巨視的な構成関係とそれぞれの領域での平均応力場は次式のようにになる。

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = [\underline{C}_i + (1-f) \{ \underline{I} + \underline{D}_i (\underline{C}_m - \underline{C}_i) f \underline{S} \}]^{-1} (\underline{C}_m - \underline{C}_i) \underline{\varepsilon}^0 \quad (4)$$

$$\underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma}_m = \underline{C}_m \{ \underline{C}_m + f (\underline{C}_m - \underline{C}_i) \underline{S} \}^{-1} \underline{C}_i \underline{\varepsilon}^0$$

$$\underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma}_i = \underline{C}_i \{ \underline{C}_m + f (\underline{C}_m - \underline{C}_i) \underline{S} \}^{-1} \{ \underline{C}_i + (\underline{C}_m - \underline{C}_i) \underline{S} \} \underline{\varepsilon}^0 \quad (5)$$

ここで注意しなければならないのは介在物のポアソン比を Eshelby のテンソル $\underline{S}$ に用いるということである。

3. 球形及び円柱状楕円体介在物の解析例

ここでは、前章で示した手法を具体的な例で検討する。母材及び介在物のそれぞれの塑性域での構成則はクリープでよく用いられているPower-lawのひとつである次式の修正Ludwik式により表わされるとする。

$$\sigma_K = \{\sigma_Y^K + h_K (\varepsilon^{p_{eq}})^n\} / \sqrt{3} \quad (K=M \text{ or } I) \quad (6)$$

ここで σ は流動応力であり σ_Y は初期降伏応力そして h と n はそれぞれ強度係数と硬化指数である。また複合材料の応力状態はすべて単軸引張とし、介在物にアイゲンひずみを与える手法をモデルA、母材に与える手法をモデルBとする。さらに母材と介在物のせん断弾性係数とポアソン比を各々 $\mu_M=100\text{Mpa}$, $\mu_I=1000\text{Mpa}$, $\nu_M=0.3$, $\nu_I=0.2$, 強度係数と硬化指数は $h_M=20\text{Mpa}$, $h_I=30\text{Mpa}$, $n=0.5$ とする。図1、図2は $\sigma_Y^M=60\text{Mpa}$, $\sigma_Y^I=30\text{Mpa}$ における介在物の形状がそれぞれ球形及び円柱状楕円体の場合の平均応力-ひずみ関係である。モデルA及びモデルB共に介在物が先に降伏する。弾性域ではモデルBが高い剛性を示すのに対して介在物が降伏後はモデルBの剛性が低下する。介在物が円柱状楕円体の場合はモデルAとモデルBの巨視的な構成則の差異は少なくなる。図3、図4は $\sigma_Y^M=50\text{Mpa}$, $\sigma_Y^I=500\text{Mpa}$ における介在物の形状がそれぞれ球形及び円柱状楕円体の場合の平均応力-ひずみ関係である。この場合にはモデルA、モデルBによらず母材が先に降伏するのだが、介在物が球形の場合にはモデルAでは延性が大きく、モデルBでは剛性の高い結果が得られる。これは母材が先に降伏するため母材が支配的な影響を及ぼすモデルAでの剛性が低下し、介在物が支配的なモデルBでは剛性を高く示すからである。図4の介在物の形状が円柱状楕円体の場合にはモデルA、モデルBにおける複合材料の巨視的な構成則は介在物の体積比率によらずほぼ一致する。

4. 考察およびまとめ

(1) 介在物が球形で母材に対して高い剛性を有し、かつ母材が先に降伏する場合にはモデルAが延性を大きくモデルBが剛性を高く示す。これはモデルAにおいては母材が、モデルBにおいては介在物が複合材料の平均応力-ひずみ関係に支配的な影響を及ぼすからである。

(2) 球形あるいは円柱状楕円体という介在物の形状の違いの影響は介在物の初期降伏応力が高く、複合材料中の母材が先に降伏する場合には大きくなる。

5. 参考文献

- 1) Mori, T. and Tanaka, K.: Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, Acta metall., Vol. 21, pp. 571-574, 1973
- 2) T. Mura: Micromechanics of defects in solid, Martinus nijhoff publishers, 1982
- 3) 村外志夫, 森勉: マイクロメカニクス=転位と介在物, 倍風館
- 4) Eshelby, J. D.: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, Proceedings of the Royal Society, London, Vol. A214, pp. 376-396, 1957

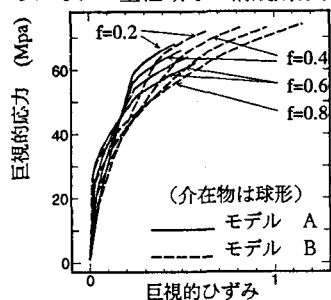


図1単軸引張での平均応力-ひずみ関係

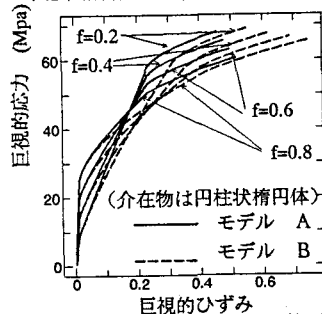


図2単軸引張での平均応力-ひずみ関係

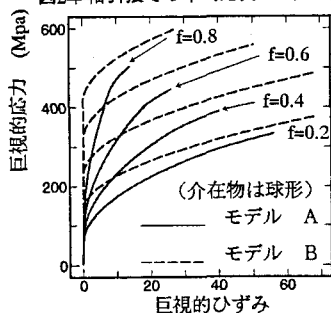


図3単軸引張での平均応力-ひずみ関係

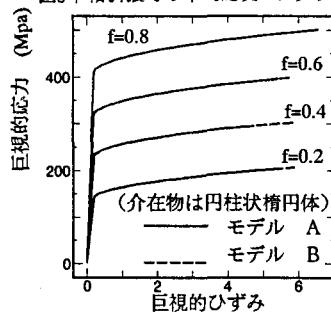


図4単軸引張での平均応力-ひずみ関係