

I-19 層ごとの変位を仮定する層状性複合板理論の一般化

福島工業高等専門学校 正員 ○根岸嘉和
同 学生 小野広治

1 緒言 層状性複合板に関する変位仮定型の一般化高次理論を構築し、解析例を示して精度の検証を行う。本理論は層接合面での変位の連続条件を満足すると同時に、層接合面での面外応力（層間応力）も未知量に取り入れるることにより、面外応力の不連続性を補う機能をもたせたもので、この系統の理論^{1)~3)}を完全に一般化した高次の静的・動的理論となっている。

2 理論の定式化 解析対象とする層状性(N層)複合板の構造と座標系を図1(a)に示す。

各記号の上付き括弧内数の[k]:k=1, 2, ..., N. は層番号を、<k>:k=0, 1, 2, ..., N. は境界面番号を表す。

理論構築の出発点として、各層の変位成分 $u_i^{(k)}$:i=x, y, z. を基準化層厚座標: ξ ($\xi=2z_k/h^{(k)}$) のべき級数展開(Mは理論次数)で次式のように仮定する。

$$u_i^{(k)} = \sum_{m=0}^{2M-1} u_{i(m)}^{(k)} \xi^m \quad (1)$$

また、変位成分は図1(b)に示すように層接合面で連続とし、次の連続条件式が成り立つものとする。

$$g_i^{(k)} = \sum_{m=0}^{2M-1} \{ u_{i(m)}^{(k)} - (-1)^m u_{i(m)}^{(k+1)} \} = 0 \quad (2)$$

式(1)の変位仮定のもとに、式(2)の変位の連続条件の $g_i^{(k)}$ にLagrange未定乗数 $\sigma_{iz}^{(k)}$ を乗じて汎関数に取り入れた Hamilton 原理を用い、独立変量を $u_{i(m)}^{(k)}$ ならびに $\sigma_{iz}^{(k)}$ にとった変分演算を実施した後、厚さ方向積分と時間tに関する部分積分を実施する。この結果を整理すると次式を得る。

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_{k=1}^N \left[\sum_{n=0}^{2M-1} \{ \int \int (\delta u_{i(n)}^{(k)} [\sigma_{iz}^{(n)} - n \sigma_{iz}^{(n-1)} + f_i^{(n)} + F_i^{(n)} - \rho \ddot{u}_i^{(n)}]^{(k)} dx dy - \phi (\delta u_{i(n)}^{(k)} [(n \alpha \sigma_{iz}^{(n)})_s - \bar{t}_i^{(n)}]^{(k)} ds) \} \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=1}^{N-1} \int \int \delta \sigma_{iz}^{(k)} g^{(k)} dx dy \right] \right] = 0 \quad (3)$$

なおドット(・)は時間tに関する偏微分を表し、 $\sigma_{iz}^{(n)}$ の後の添字はその座標に関する偏微分を表す。またアン添字はx, y, zをとり、ギリシャ添字は面内座標x, yをとるものとし、繰り返し添字には総和規約を適用する。さらに $n \alpha^{(k)}$ は側端面における法線方向余弦である。 $\sigma_{iz}^{(k)}$ は各層の応力成分であり、一般

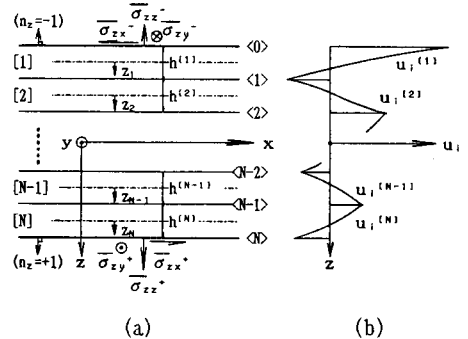


図1 層状性複合板と座標系および変位の仮定

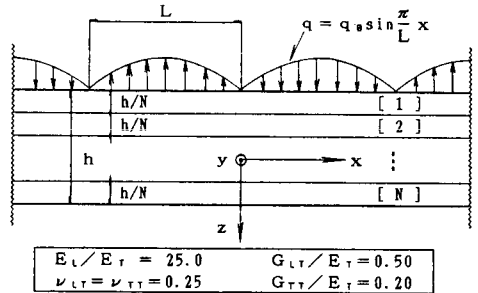


図2 正弦分布荷重を受ける無限クロスプライ層状板

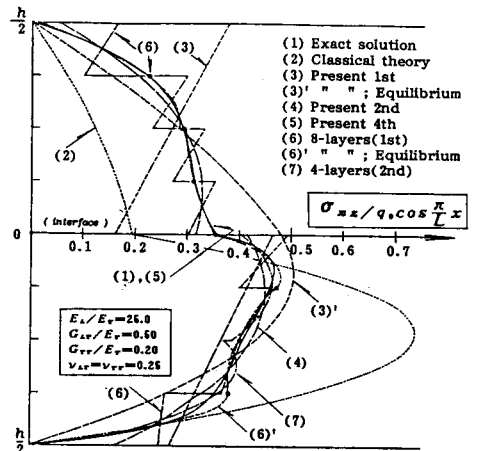


図3 面外せん断応力(σ_{xz})の厚さ方向分布(2層板)

的な異方性を示す次式の構成関係式で与えられる。

$$\sigma_{ij}^{[k]} = C_{ijkl}^{[k]} \{ (u_{k,1} + u_{l,k})/2 \}^{[k]}, \dots \dots (4)$$

また式(3)の各記号は次式で定義されるような、各層ごとの高次モーメントを表している。

$$\left. \begin{aligned} \{ \sigma_{ij}^{(n)}; f_i^{(n)}; t_i^{(n)} \} &= \int_{-1}^1 \{ \sigma_{ij}^{[k]}; f_i^{[k]}; t_i^{[k]} \} \xi^n d\xi, \\ F_i^{(n)} &= [\sigma_{iz}^{[k]} \xi^n]_{-1}^1 = \sigma_{iz}^{[k]} - (-1)^n \sigma_{iz}^{[k-1]}, \\ \rho^{(m,n)} &= \int_{-1}^1 \rho^{[k]} \xi^m \xi^n d\xi, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

なお $f_i^{[k]}$ は物体力, $t_i^{[k]}$ は側端面荷重, $\rho^{[k]}$ は質量密度である。

式(3)の重積分中の $\delta u_{i(n)}^{[k]}$ の係数式から各層ごとの運動方程式が得られ、 $\delta \sigma_{iz}^{[k]}$ の係数式として式(2)に示した変位の連続条件が得られる。また、式(3)の周積分中の $\delta u_{i(n)}^{[k]}$ の係数式あるいは付帯条件式より境界条件式が得られることになる。

3 各次数の理論 N層板をM次理論で解析する場合の未知量は、式(1)の変位係数: $u_{i(n)}^{[k]}$ が6NM個と層間応力: $\sigma_{iz}^{[k]}$ が3(N-1)個の合計6NM+3(N-1)個となる。なお本理論の1次理論で面外変位の1次成分 $u_{z(1)}^{[k]}$ を削除したものがMauの理論²⁾に一致する。また本理論は、均質板に関しては著者の一人らが先に提案した一般化高次理論³⁾に一致する。

4 数値計算例 図2に示すような横等方性材料よりなるクロスプライ直交異方性層状板に、正弦分布荷重: $q = q_0 \sin(\pi x/L)$; $h/L = 1.0$ が作用した問題を各次数の理論で解析し、変位、応力(つり合い法による補正結果を含む)の層厚方向分布について厳密解⁴⁾および古典理論による解⁵⁾と比較する。図3と図4は2層の非対称クロスプライ板の解析結果であるが、疑似的な層分割を行い低次の理論(8層分割に1次理論, 4層分割に2次理論)を適用した結果も併せて示した。

図5と図6は9層の対称クロスプライ板の解析結果であるが、全層一体化の変位仮定に基づく一般化高次理論³⁾(Gross displacement theory)の3次理論、10次理論等による結果を併記した。

参考文献 (1) Sun, C. T. and Whitney, J. M.: AIAA J., 11(1973), 178. (2) Mau, S. T.: J. Appl. Mech., 40(1973), 606. (3) 平島・根岸: 土木学会論文報告集, 330(1983), 1; 333(1983), 21. (4) Pagano, N. J.: J. Comp. Mat., 3(1969), 398. (5) Reissner, E. and Stavsky, Y.: J. Appl. Mech., 28(1961), 402.

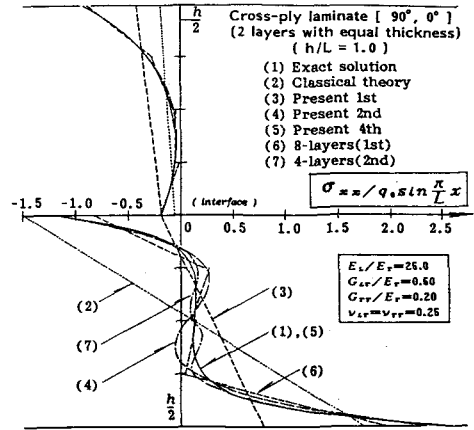


図4 面内直応力(σ_{xx})の厚さ方向分布(2層板)

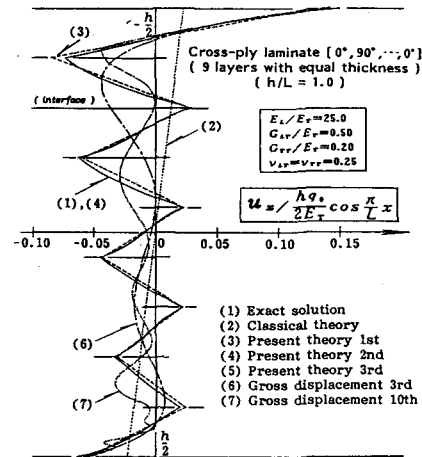


図5 面内変位(u_x)の厚さ方向分布(9層板)

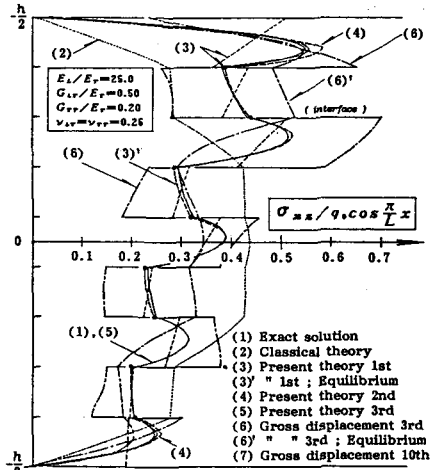


図6 面外せん断応力(σ_{zz})の厚さ方向分布(9層板)