

I - 7

弾性棒により衝撃されたはりの初期応答について

岩手大学工学部 正 員 岩崎 正二 宮本 裕 出戸 秀明
 学生員○松田 雄大 村井 大尊

1. はじめに

弾性棒がはりに衝突する問題^{1), 2), 3)}を取り上げ、衝撃力を未知数とする非線形積分方程式を導き数値解析を行なって衝撃力を受けるはりの初期挙動を明らかにした。さらに弾性球と弾性棒による衝撃力の比較を行なうために、単純支持はりに同重量の弾性球と弾性棒が衝突する場合の数値解析を行ない、その結果から重量比（はりの重量／衝突物体の重量）が大きい範囲では両結果がよく一致することがわかった。

2. 解析理論

図-1(a) に示すような、有限長棒により衝撃される単純支持はりを対象として解析を進める。図-1(b) に示すように衝突した状態での弾性棒の問題を考えると、初速度 V_0 で運動している弾性棒が一端に衝撃力 $P(t)$ を受ける問題と一致する。弾性棒の運動方程式は軸方向変位を u とすると、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

ここで、 $C_b = \sqrt{E_0/\rho_0}$ 。

初期条件と境界条件はそれぞれ次のようになる。

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = -V_0 \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} E_0 A_0 \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= -P(t) \\ \frac{\partial u(\ell_0, t)}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式(1)を有限フーリエ・cosine変換を用いて解析すると衝撃点の軸方向変位 $u_0(t)$ は、

$$\begin{aligned} u_0(t) &= -V_0 t + \frac{1}{\rho_0 A_0 \ell_0} \int_0^t P(\tau)(t-\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{2}{\rho_0 A_0 \ell_0} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t P(\tau) \frac{\sin P_n(t-\tau)}{P_n} d\tau \quad \left(\text{ここで、} P_n = \frac{m\pi}{\ell_0} C_b \right) \end{aligned} \quad (4)$$

次に長さ ℓ の単純支持はりの任意点 $x = \xi$ に集中荷重 $P(t)$ が作用する場合の任意点のたわみの式は、

$$w(\xi, t) = \frac{2}{\rho A \ell} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t P(\tau) \frac{\sin \alpha_n(t-\tau)}{\alpha_n} d\tau \left(\sin \frac{m\pi}{\ell} \xi \right)^2 \quad (5)$$

ここで、 $\alpha_n = \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^2 a$ 、 $a = \sqrt{\frac{E_1 I}{\rho A}}$ 。

また弾性棒の先端に曲率 R があるとすると Hertz の弾性接触理論より衝撃力 P と、弾性棒とはりとの相対変位 δ との間に次式が成立する。

$$\delta(t) = K P^{\frac{2}{3}}(t) \quad (6)$$

ただし、 $\delta(t) = u_0(t) - w_0(t)$ 、 $K = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2}{16} \frac{(k_0 + k_1)^2}{R}}$ 、 $k_0 = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0}$ 、 $k_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1}$ 、

ν_0, ν_1, E_0, E_1 はそれぞれ弾性棒とはりのポアソン比と弾性係数を表わす。

式(4)（符号をかえる）、式(5)（ $\xi = \ell/2$ ）を式(6)に代入することにより、有限長棒により中央を衝撃された単純支持はりに生ずる衝撃力を定める非線形積分方程式が次式のように得られる。

$$\begin{aligned} K P^{\frac{2}{3}}(t) &+ \frac{1}{\rho_0 A_0 \ell_0} \int_0^t P(\tau)(t-\tau) d\tau + \frac{2}{\rho_0 A_0 \ell_0} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t P(\tau) \frac{\sin P_n(t-\tau)}{P_n} d\tau \\ &+ \frac{2}{\rho A \ell} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t P(\tau) \frac{\sin \alpha_n(t-\tau)}{\alpha_n} d\tau = V_0 t \end{aligned} \quad (7)$$

3. 数値計算例

長方形断面の単純支持鋼はりの中央に同重量の弾性棒と弾性球を落下させ衝撃力について比較検討した。その際のはりの重量 W を一定とし、落下物体の重量 W_0 を変えることで重量比 $\alpha = W/W_0$ を変化させ計算を行った。数値計算に用いた値は次に示すとおりである。

はりの諸元

はりの寸法[幅×高さ×長さ(cm)]: $5.0 \times 5.0 \times 100$

ヤング率: $E_1 = 2.1 \times 10^6$ (kgf/cm²)

ポアソン比: $\nu_1 = 0.3$

単位体積質量: $\rho_1 = 0.801 \times 10^{-5}$ (kgf·sec²/cm⁴)

衝突物体の諸元 (指示がなければ弾性棒と弾性球は共通の値を用いる。)

重量比: $\alpha = 0.0 \sim 100$

衝撃速度 (落下高さ): $V = 313.05$ (cm/sec)
($h = 50$ (cm))

ヤング率: $E_0 = 2.1 \times 10^6$ (kgf/cm²)

ポアソン比: $\nu_0 = 0.3$

弾性棒の断面積: ① $A_0 = 0.789$ (cm²) [1.0cm ϕ]

② $A_0 = 3.145$ (cm²) [2.0cm ϕ]

③ $A_0 = 7.069$ (cm²) [3.0cm ϕ]

単位体積質量: $\rho_0 = 0.801 \times 10^{-5}$ (kgf·sec²/cm⁴)

弾性棒先端の曲率半径: $R = 1.5$ (cm)

図-2 は弾性球が落下する場合、重量比 α を変化させた場合の衝撃力の応答のグラフである。図より弾性球が落下する場合は、重量比 α が小さくなるほど生ずる衝撃力は大きくなり2度打ち現象が生じていることがわかる。この現象は無限長はり理論を用いた場合には生じない。同様に図-3 は弾性球と同重量の直径3cmの弾性棒が落下する場合の衝撃力のグラフである。図より衝撃力は重量比 α が小さくなるに従い半無限長棒が衝突した場合と同じ傾向になり、逆に重量比 α が大きくなると弾性球が衝突した場合と一致する。図-4 は最大衝撃力と重量比 α との関係を同重量の弾性球と弾性棒(直径1cm, 2cm, 3cm)の4種類について表わしたものである。図より α が大きい範囲では3本のグラフは同じような値になることがわかる。また弾性棒による衝突では α が小さい範囲では最大衝撃力はほとんど変化しないことがわかった。

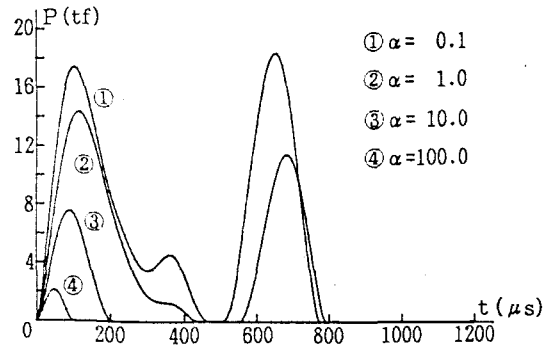


図-2 弾性球による衝撃力と重量比の関係

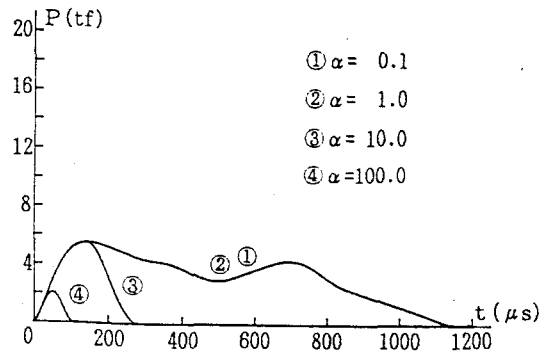


図-3 弾性棒による衝撃力と重量比の関係

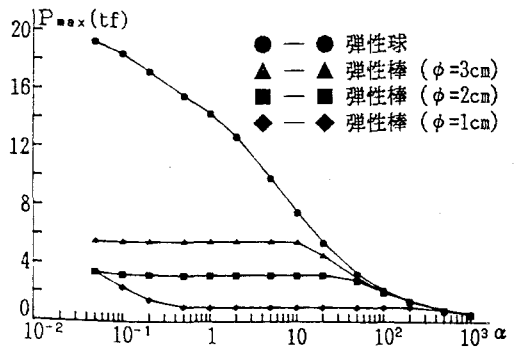


図-4 最大衝撃力と重量比の関係

参考文献

- 1) 小高忠男・中原一郎: 弾性棒で衝撃された無限長はりの応力、日本機械学会論文誌、33巻、248号、pp.533-541、1967
- 2) S.Ranganath: Normal Impact of an Infinite Elastic Beam by a Semi-Infinite Elastic Rod, Journal of Applied Mechanics, Vol.38, No.2, pp.455-460, 1971
- 3) 青柳史郎: 構造物における衝撃現象の数値解析、土木学会論文報告集、第206号、pp.13-22、1972