

Ⅳ-9

四辺形調整覚書

八戸工業大学 正会員 岩淵清行

1. まえがき

所謂四辺形調整厳密解において、角補正法の公式に角の重み係数行列（コファクター）をかけて方向補正法の解を得る計算式を昨年紹介したが¹⁾²⁾、今回は従来法による（コファクター無しの場合の）方向補正法の解公式を示す。これは標定誤差を分かりやすく説明するための一つのテクニックになる。よく知られる如く測線や測点に対する記号の付け方のよしあしで後の計算が楽にもなるし難儀にもなる。コファクター使用の時は心ない記号の付け方をするとコファクターが見付からないという事にもなる。この事については次回に述べる予定である。

2. 与件

今回は記号番号の付け方があまり良くない図1の場合について考える。四辺形ABCDにおいて点Aと点Bは既知点、CとDは未知点である。既知座標値はXA=0, YA=0, XB=1000m, YB=0とする。測線方向の観測値Hj（方向角では無いことに注意）は次の如く与えられたとせよ。（角の単位は、別に断わるまで、度分秒とする。）

A点で H3=0.0000, H2=16.2523, H1=48.2540

B点で H12=0.0000, H11=49.2502, H10=83.3634

C点で H9=0.0000, H8=64.2253, H7=94.5746

D点で H6=0.0000, H5=50.5120, H4=133.0035

これから挟角 θ_i (1,2,3,...,8)は計算によって $\theta_1 = H1 - H2 = 32.0017$, $\theta_2 = H11 - H12 = 49.2502$, $\theta_3 = H10 - H11 = 34.1132$, $\theta_4 = H8 - H9 = 64.2253$, $\theta_5 = H7 - H8 = 30.3453$, $\theta_6 = H5 - H6 = 50.5120$, $\theta_7 = H4 - H5 = 82.0915$, $\theta_8 = H2 - H3 = 16.2523$

と間接的に求められる。方向Hiの観測精度はすべて等しいと仮定する。

3. 条件方程式をたてての方向補正法

方程式の計算の時は角はらじあん単位とせよ。直接観測値Hjの補正値を ΔH_j (j=1,2,...,12)とすると線形化された条件方程式は $[A][\Delta H] = [F] \dots\dots\dots (1)$ となる。 $[A]$ の要素は $C_i \equiv 1/\tan \theta_i$ として、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ C1 & -C1-C8 & C8 & C7 & -C7-C6 & C6 & C5 & -C5-C4 & C4 & C3 & -C3-C2 & C2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{右辺}[F] \text{は} \quad F1 &\equiv 2\pi - \sum \theta_i &= -0.00016968782 \\ F2 &\equiv \theta_5 + \theta_6 - \theta_1 - \theta_2 &= 0.0002617995623 \\ F3 &\equiv \theta_7 + \theta_8 - \theta_3 - \theta_4 &= 0.00006302593368 \\ F4 &\equiv 1/W - 1 &= 0.0003176758 \end{aligned}$$

ここに $W \equiv (\Pi \text{奇数 SIN } \theta_i) / (\Pi \text{偶数 SIN } \theta_j)$ である。Fjの値の計算式を θ_i でしめたのは何を条件にしたか分かりやすくするためである。さて(1)を

$\Omega \equiv 1/2 \times \sum (\Delta H_i)^2 - \lambda_1 \phi_1 - \lambda_2 \phi_2 - \lambda_3 \phi_3 - \lambda_4 \phi_4$ を最小ならしめる如くに解く。 λ_j はラグランジュの未定係数で、 ϕ_j (j=1,2,3,4)は線形化された条件方程式の左辺である。まず初めに正規方程式 $[N][\lambda] = [F]$ から λ を求める。ここに $[N] \equiv [A][A]^T$ であって $[\lambda]$ は $[N]^{-1}[F]$ で計算される。そして $[\Delta H] = [A]^T[\lambda]$ から観測方向の補正値が(秒単位にもどして) $\Delta H1=3.656$, $\Delta H2=-11.562$, $\Delta H3=7.906$, $\Delta H4=-4.924$, $\Delta H5=-6.682$, $\Delta H6=11.606$, $\Delta H7=-9.489$, $\Delta H8 =$

5.510, $\Delta H_9=3.979$, $\Delta H_{10}=-2.330$, $\Delta H_{11}=3.911$, $\Delta H_{12}=-1.580$ となる。この答は条件方程式(1)を満足していることを確認されたし。 挟角の補正秒 $\Delta \theta_i$ は $\Delta \theta_1=15.218$, $\Delta \theta_2=5.492$, $\Delta \theta_3=-6.242$, $\Delta \theta_4=1.530$, $\Delta \theta_5=-14.999$, $\Delta \theta_6=-18.289$, $\Delta \theta_7=1.758$, $\Delta \theta_8=-19.469$ である。

4. 観測方程式をたてての方向補正法

線形化された観測方程式は $[\Delta H] = [A] [\Delta X] + [F] \dots \dots (2)$ の形をしている。ここに $[\Delta X]^T \equiv [\Delta T_1, \Delta T_2, \Delta T_3, \Delta T_4, \Delta X_C, \Delta Y_C, \Delta X_D, \Delta Y_D]$ で $[F]$ は定数項である。 $F(I) \equiv HC(I)-H(I)$ とおく。これは標定角 $T(I)$ を全部0とみたことになる。 $HC(I)$ は逆算方向角。 $[A]$ の要素は下の如し。空欄は0。

		ΔT_1	ΔT_2	ΔT_3	ΔT_4	ΔX_C	ΔY_C	ΔX_D	ΔY_D
AB	ΔH_1	$\begin{bmatrix} A(1,1) & & & & & & & \\ A(2,1) & & A(2,5) & A(2,6) & & & & \\ A(3,1) & & & & & & A(3,7) & A(3,8) \\ & A(4,2) & & & & & A(4,7) & A(4,8) \\ & A(5,2) & & & & & A(5,7) & A(5,8) \\ & A(6,2) & & & A(6,5) & A(6,6) & A(6,7) & A(6,8) \\ & & A(7,3) & & A(7,5) & A(7,6) & A(7,7) & A(7,8) \\ & & A(8,3) & & A(8,5) & A(8,6) & & \\ & & A(9,3) & & A(9,5) & A(9,6) & & \\ & & & A(10,4) & A(10,5) & A(10,6) & & \\ & & & A(11,4) & & & A(11,7) & A(11,8) \\ & & & A(12,4) & & & & \end{bmatrix}$							
AC	ΔH_2								
AD	ΔH_3								
DA	ΔH_4								
DB	ΔH_5								
DC	ΔH_6								
CD	ΔH_7								
CA	ΔH_8								
CB	ΔH_9								
BC	ΔH_{10}								
BD	ΔH_{11}								
BA	ΔH_{12}								

$\Delta T_1, \Delta T_2, \Delta T_3, \Delta T_4$ の係数は0以外すべて-1である。
 $\Delta X_C, \Delta Y_C, \Delta X_D, \Delta Y_D$ の係数はその測線の逆算方向角を計算するATNの式をそれぞれ X_C, Y_C, X_D, Y_D で偏微分した値である。 今 $[N] \equiv [A]^T [A]$,
 $[U] \equiv [A]^T [F]$ とおくと $[N] [\Delta X] + [U] = 0$ から $[\Delta X]$ すなわち $\Delta T_1, \Delta T_2, \Delta T_3, \Delta X_C, \Delta Y_C, \Delta X_D, \Delta Y_D$ がもとめられる。それから $[\Delta H]$ が求まる。
 答は先に示した条件方程式による方向補正法と同じである。

5. 参考文献

- 1) 岩淵；土木学会東北支部発表会（平成2年3月）
- 2) 岩淵；土木学会第45回年次会議概要集第4部、（平成2年）

