Ⅳ－４　地域間分析のためのＳＮＡ係数行列の収束計算アルゴリズム

東北大学　正員　稲村　肇

１．本研究の背景と目的

地域間物流の予測手法は従来から数多く提案されている。現在、その中心となっているのは以下の２つのアプローチである。 ① 地域毎の産業別出荷額等経済指標と物流を関数関係で結び、将来の経済指標を与え、物流を予測する。 ② 地域間産業連関表から将来の産業別交易額を予測し、これを商品別物流量に換算する。

しかし、両アプローチは経済活動と商品取引・流動が構造的に結び付いていないため、精度の問題点がある。著者ら1)は、この問題を解決すべく、地域間新ＳＮＡ行列による方法を提案した。この方法の技術上の最大の問題は地域間産業連関表から新ＳＮＡ行列に変換するアルゴリズムの開発である。著者らは同論文において変換アルゴリズムを提案しているが、その方法は効率的であるとは言えない。そこで本研究においては、その新ＳＮＡ係数行列の計算・推計アルゴリズムの開発を行なうものである。

２．従来の研究

地域間産業連関表から地域間ＳＮＡ行列を推計するアルゴリズムは現在のところ開発されていない。問題の本質は、ある（ｎxｎ）の行列に関し、行和・列和といった２ｎの既知変数と当行列の初期値を所与とした場合に行列の要素を推計するものである。この最も単純な場合に関してはフレーター法、デトロイト法などが著名である。

産業連関表の更新を目的とした、この種の研究は非常に盛んである。そのうち最も頻繁にしようされるのがR.Stone や Bacharachによって展開されたＲＡＳ法である。McMenamin and Haring がそのインプット面を改良したモデルは、変形ＲＡＳ法、あるいはＨ－Ｍ法と呼ばれる。これらは行と列を交互に修正する単純さや使いやすさを特徴とする。Friedlander は境界制約の下で、基準年表と更新表の間のある種の距離を最小化する方法を開発した。これはラグランジュ乗数法により解かれているが、負の値を排除できないという欠点を持つと言われてきた。しかし、Morrison and Thumann はその問題は実用上は些細なことであることを証明した。負値問題を解決するため、Matuszewskı らは線形計画法による推定法を開発し、Harrıgan and Buchanan は二次計画法による最適化問題で定式化し、各要素の値を推定した。しかし数理計画法はデータ制約等実用上の問題が存在する。

上記のほとんどの方法は産業x産業のいわゆるレオンチェフ型産業連関モデルに焦点を当てたものであり、矩形型、すなわちＳＮＡ型モデルに適用した例は極めて少ない。Larry はこれらのモデルの内、矩形型モデルに容易に適用可能な上記の３モデル、すなわちＲＡＳ法、Ｈ－Ｍ法、ラグランジュ乗数法、に関しその適用性を実験に依って確かめている。これによれば、ＲＡＳ法が最も良い近似を示すとされている。

３．地域間新ＳＮＡシステムの概要

表－１は通常のチェネリー・モーゼス型の産業連関モデルである。一般には生産（総需要，総供給）ｇはXで表示されているがここではＳＮＡとの対応を意識してｇとした。表－１においてＡは投入係数行列でありこれを加工度変化、投入代替により更新するのが従来の目的である。ここで「'」は転置、「^」は対角行列を表わす。

例えばＲＡＳ法はＡの初期値とＡｇの行和、列和を与えて新しいＡを求めるアルゴリズムである。いま表－１の横行のバランスは(1)式で表わされる。

$$Ag + f - m = g \qquad \text{-------}(1)$$

ここで、

$$T^{rs}(g^s + f^s) = m^{rs} \qquad \text{-------}(2)$$

なる対角行列T^{rs}を地域R，Sに関する交易係数という。T^{rs}を用いて(1)式を書き直せば(3)式となる。

$$TAg + Tf - mg = g \qquad \text{-------}(3)$$

これをチェネリー・モーゼス型地域間産業連関表と呼ぶ。表－２はこれを示している。

産業連関表の最大の弱点は物資の取引を産業間の取引としてのみ捉えている為、ある集

表－１　地域内産業連関表

	産業部門	最終需要	移入	生産
産業部門	中間需要 $A\hat{g}$	f	m	g
付加価値	y'			
生産	g'			

表－２　地域間産業連関表

		地域R 産業部門	地域S 産業部門	最終需要R	最終需要S	生産
地域R	産業部門	$T^{rr}A^{rr}\hat{g}^r$	$T^{rs}A^{ss}\hat{g}^s$	$T^{rr}f^r$	$T^{rs}f^s$	g^r
地域S	産業部門	$T^{sr}A^{rr}\hat{g}^r$	$T^{ss}A^{ss}\hat{g}^s$	$T^{sr}f^r$	$T^{ss}f^s$	g^s
付加価値		y^r	y^s			
生産額		$g^{r\prime}$	$g^{s\prime}$			

表－３　新ＳＮＡ産業連関表

	商品部門	産業部門	最終需要	生産
商品部門		$U = B\hat{g}$	e	q
産業部門	$V = D\hat{q}$			g
付加価値		y'		
生産額	q'	g'		

計された産業部門は１品目（合成品目）のみを産出し、また単一産業からは単一品目しか投入されないという強い仮定である。

これを緩和したのが新ＳＮＡ産業連関表で、表－３に表わされている。ここでＶを単位行列とすればＢ＝Ａとなり、ＳＮＡは通常の産業連関表と一致する。

従来の研究にある、ＳＮＡ行列の更新法（ＲＡＳ法、H-M法、ラグランジュ乗数法）とは表－３において、商品産出行列Ｖの行和，列和、商品投入行列Ｕの行和，列和、及びＵ,Ｖの初期値を所与としてＤ,Ｂ行列を推計するものである。

３．ＳＮＡ係数行列の推計法

３．１制約条件

地域間新ＳＮＡ産業連関表とは表－３の形のＳＮＡ行列を表－２の形の地域間表に拡大したものである。本研究の目的は表－２に示した地域間産業連関表の全ての変数を既知として、地域毎のその他の変数、すなわち $U(=Bg), V(=Dq), q, e$ を求めようとするものである。地域間のＵ,Ｖ,ｑ,ｅは表－２,３の合成マトリックスとなっているため、分割行列の性質を使えば、推計アルゴリズムとしては表－１の情報を所与とし、表－３を導くのとほぼ同値である。（但し、移入項は地域間表になっている為ない）　いま、簡略のため、Ｕ,Ｖは正方行列であるとすれば、表－１,表－３より

$Ag + f = g$ ------(4)　$q = Ui + e$ ------(5)

$g = Vi$ ------(6)　$U = Bg$ ------(7)

$V = Dq$ ------(8)

(4)より、

$$g = (I - A)^{-1} f \quad \text{-------}(9)$$

(5)、(6)、(7)、(8)より、

$$g = (I - DB)^{-1} De \quad \text{-------}(10)$$

が容易に導かれる。いま両式の比較により、

$A = DB$ ------(11)　$f = De$ ------(12)

と置くことができる。

３．２　変形ＲＡＳ法

この問題は本質的には既知変数の数が２ｎに対し未知数の数がn^2個あり、ユニークには解けない。しかし、幸運なことに我々は国ベースでの産出係数Ｄの値を知っている。産出係数は地域に依ってそれほど大きな差はないと考えられるため、これを地域間のD^{rs}初期値とすることは許されるだろう。いま、Ａ,ｆ,ｇは既知であり初期値のＤを知れば、我々は上記の式を変形して、

$B_{n-1} D^{-1} A$ ------(13)　$U = Bg$ ------(14)

$e = D^{-1} f$ ------(15)　$q = Ui + e$ ------(16)

$V = Dq$ ------(17)　${}_n g = Vi$ ------(18)

の手順でｎ回目のｇの推定値${}_n g$を知ることができる。ここで産出行列Ｄは対角付近に大きな値が入っていることに注意すれば、(14)式から明らかなようにｇの誤差を減少させるためには$(gi / {}_{n-1} gi)$の平方根を対角要素とする行列Ｇをつかって ${}_n B = G_{n-1} BG$ なる${}_n B$を求めたのち(20)式からＤを求めればよい。

$${}_n D = A_n B^{-1} \quad \text{-------}(20)$$

３．３　変分法

前記の条件式で独立な条件式は(7),(8),(11),(12)および表－３の行、列のバランス式(21),(22)式である。

$$(U + e) i = qi = (i'V)' \text{-------}(21)$$

$$i'(U + y) = i'g = (Vi)' \text{-------}(22)$$

ここで未知数Ｄ、Ｂ、ｅ、Ｕ、Ｖ、ｑの中からＵ、Ｂ、ｅ、ｑを消去すれば４つのベクトル制約式(23)、(24)が容易に得られる。

$$(D^{-1} Ag + D^{-1} f) i = D^{-1} Vi = (i'V)' \text{-----}(23)$$

$$i'(D^{-1} Ag + y) = i'g = (Vi)' \text{-----}(24)$$

いま、この制約式は求めたい２つの変数Ｄ,Ｖのみを含むため、４つの未定乗数を導入した次の変分式が導ける。

$$\begin{aligned} I(D, V; D^0, V^0) &= i'(D - D^0)^T (D - D^0) i \\ &+ i'(V - V^0)^T (V - V^0) i \\ &+ \mu_1 \{D^{-1}(Ag + f - V) i\} \\ &+ \mu_2 \{D^{-1} Vi - (i'V)'\} \\ &+ \mu_3 \{i'(D^{-1} Ag + y - g)\}' \\ &+ \mu_4 \{i'g - (Vi)'\}' \quad \text{------}(25) \end{aligned}$$

これを$D, V, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$,に関して微分して０とおけば、未知数に対する２次の連立方程式となるため、これを数値計算によって解けばよい。

$$\frac{\partial I}{\partial D} = \frac{\partial I}{\partial V} = \frac{\partial I}{\partial \mu_1} = \frac{\partial I}{\partial \mu_2} = \frac{\partial I}{\partial \mu_3} = \frac{\partial I}{\partial \mu_4} = 0 \quad \text{-----}(26)$$

４．結論

本研究に於ては地域間産業連関表から新ＳＮＡ行列を求める収束計算の方法を定式化した。変形ＲＡＳ法と変分法を比較すれば理論的には全要素の初期値を均等に扱う後者が優れていることは明らかである。しかし、商品産出係数Ｖ及びその係数行列Ｄは対角要素が重要であることから、経済学的観点からは前者も捨てがたい。今後は実際例を計算して、その優劣を評価して行きたい。