

Ⅲ—17 2相系モデルを用いた土の熱伝導率の算定について

東北大学 工学部（学）○塚田 夏樹（正） 柳沢 栄司

1、まえがき

2相系物質の熱伝導率に関する研究は数多く報告されているが、土のような3相系物質に関しては余り研究されていない。本研究では土を理想化した2相系モデルを用いて導いた熱伝導率の算定法について、従来提案されている実験式と対比して考察する。ここで、実験式としては、全くの数学的表現に過ぎない任意分布モデルの式の値を用いることにし、この式についての物理的意味の一考察を与えてみた。

2、モデル化及びモデルにおける熱伝導率の算定

1) モデル…図Ⅰのように格子状に並んだ土粒子を考える。ここで土粒子は全て球状かつ均質とする。又、間隙は全て水で満たされているとする。尚、土粒子は均一等分布状に並んでいればよく、必ずしも接している必要はないものとする。

2) モデルにおける合成熱伝導率の直観的な解…図Ⅱのような半径aの1個の土粒子を考え、上部（全域）に温度 T_1 、下部に T_2 を与え定常状態にした時の合成熱伝導率kを求める。（但し $T_1 > T_2$ とする。）今、見かけ上の熱伝導率kを用いると、土が均一かつ一様な物質で出来ているとみてよいため、平均熱流束 q は $q=k(T_1-T_2)/2R$ …(2-1)となる。次に、縦に切った任意の断面について考えると、図Ⅱの上から見て点 (r, θ) を通る熱流速を $q(r, \theta)$ とおくと、 $q(r, \theta)$ の径路をsとして

$q(r, \theta)=k_w (T_1-T_1(r, \theta)) / \int f_1(r, \theta)ds=k_a (T_1(r, \theta)-T_2(r, \theta)) / \int f_2(r, \theta)ds=k_w (T_2(r, \theta)-T_2) / \int f_3(r, \theta)ds$ となり、従って、 $q=\int \int q(r, \theta)drd\theta / R^2 (0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 2^{1/2}R)$ …(2-2)であるから、(2-1)式と比較して、 $k=2 \int \int q(r, \theta)drd\theta / R(T_1-T_2)$ …(2-3)となり、これが求める合成熱伝導率である。

3) モデルにおける合成熱伝導率…1)で示す様なモデルの合成熱伝導率を求めるに当たり、熱伝導の方程式と電場の方程式の類似性を用いて式を考えてみる。ここに水中に存在する1個の土粒子を考えた場合の熱伝導モデルを想定する。

支配方程式、 $q=-kdT/dx$ （熱流束）…(2-4) $D=-\epsilon d\psi/dx$ （電束）…(2-5)であるから両式に従って一様電場の中に誘電体球を入れた場合、誘電体球の式は図Ⅲのように座標系を取ると $(r>a)$ において次式に示す様になる
 $E_1=E_0 [i_r (1+2(\epsilon-\epsilon_0)/(\epsilon+2\epsilon_0))(a/R)^3 \cos\theta - i_\theta (1-(\epsilon-\epsilon_0)/(\epsilon+2\epsilon_0))(a/R)^3 \sin\theta]$ ($r>a$)

ここで、1つのケースとして高さ $2R$ 、半径 R の円柱に半径 a の球がある場合を考えると、誘電体球の式を変形して $\epsilon_0 E_1 = \epsilon_0 E_0 [i_r (1+2(k_a-k_w)/(k_a+2k_w))(a/R)^3 \cos\theta - i_\theta (1-(k_a-k_w)/(k_a+2k_w))(a/R)^3 \sin\theta]$ …(2-6)

ここに、 $q_0=k_w(T_1-T_2)/2R$ 。但し、この熱流 q_1 は半無限一様熱流の中に土粒子を1個入れた場合の熱流に対応する。即ち、上のケースは、半無限の中での枠を取っただけである。…(*)今、 $y=R$ において熱流はy方向成分しか持たないとすると(2-6)式の q_1 のy方向成分は、 $q_{1y}=q_0 [1+K(a/R)^3(3\cos^2\theta-1)]$ ($K=k_a-k_w/k_a+2k_w$)であるが、 $\cos\theta=R/r$ より、 $q_{1y}=q_0 [1+3Ka^3R^2/r^5-K(a/R)^3]$ …(2-7)となる。

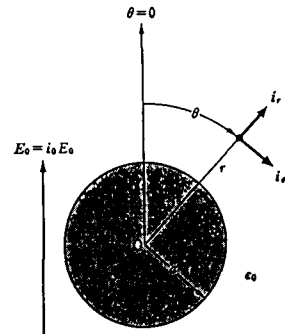
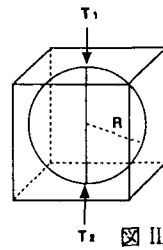
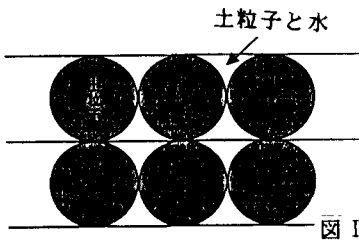
この式は(*)より、有限のコンデンサーの中に誘電体球を入れた場合より値が弱く出るはずである。そこで次のような仮定をする。即ち「無限の均一電場の中に誘電体球を入れたときに q_1 のy方向成分が式(2-7)の形になるのなら、有限のコンデンサーの中に誘電体球を入れた場合も q_1 のy方向成分は(2-7)の様な形で係数を換えたものになるはずである。」…(**)

よって、式(2-7)の右辺第2、3の係数3、1をA、Bとおくと、 $q_{1y}=q_0 [1+AKa^3R^2/r^5-BK(a/R)^3]$ となり、式(2-3)より合成熱伝導率kは、 $k=k_w \{1+2Ka^3/R^3(1/3A-A/(6*2^{1/2})+B/2^{1/4}-B)\}$ …(2-8)となる。この式(2-8)は、上から見て半径Rの円の平均熱流束を取ったが、一辺 $2R$ の正方形の熱流束を取ったときと比較して、 $k_a > k_w$ であることを考慮に入れると、 $\pi R^2/4R^2 = \pi/4$ より、式(2-8)を正方形の近似とみてよい。

3、合成熱伝導率と従来の実験式との対比

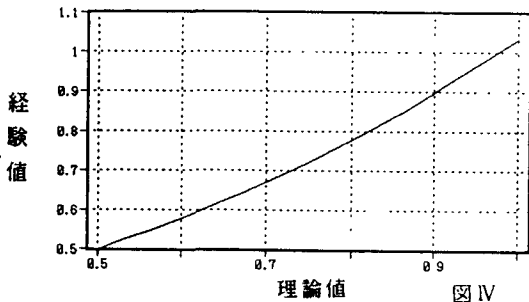
2で求めた合成熱伝導率の式の定数A、Bを決定するに当たり、実験値をよく表すとされている任意分布の式 $k=k_w \cdot k_s^b (a+b=1)$ (a,bは各々の物質の体積比)を理論値との値の比較に用いてみる。ここで、土粒子と水の代表的な熱伝導率は次のようになる。水の熱伝導率： $k_w \approx 0.477(1+0.003t)$ ；土粒子の熱伝導率： $k_s = 1.70 \sim 2.10$ (砂質土), 2.83 (長石、花崗岩、珪石、玄武岩の平均) (単位: kcal/m.h.°C)

以上より、土粒子と水の2相系モデルについて考えると、(**)より $A=6, B=1$ として式(2-8)は $k=k_w \{1+2K(a/R)^3\} \dots (2-9)$ となる。この時、 $k_w=0.50$ (一定)として $k_s=2.00, 2.80$ について(2-9)式の値を $(a/R)^3$ が0.10~1.00まで変化させて求めた値を横軸に、又、実験式の値を縦軸にとると図IV、Vに示すようになる。この2つの値を比べると、オーダーとしては両者の差は $10^{-2} \sim 10^{-1}$ 程度なので、有効桁数は3桁であることを考えると式(2-9)による値は実験値をよく近似していると考えられる。又、これらのグラフより、任意分布モデルの式に対する物理的意味の一端を与えることになる。



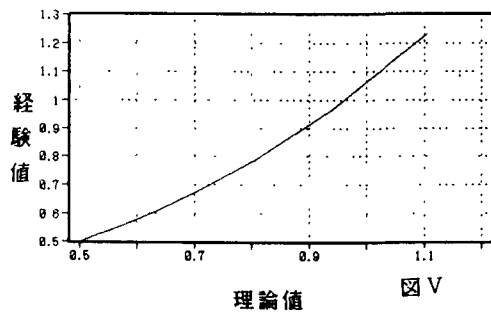
図III 均一静電界中に置かれた誘電体球

熱伝導率の比較 ($k_s=2.0$)



図IV

熱伝導率の比較 ($k_s=2.8$)



図V

4、まとめ

式(2-9)において $(a/R)^3 = (1-\psi_w)6/\pi = \psi_s 6/\pi$ (ψ_s, ψ_w はそれぞれ液相、固相の体積比)として表されるが、間隙率との関係より、体積比のみより合成熱伝導率が求められる範囲は0.5前後までと考えられる。

($a/R=1$ の時、間隙率は約0.48)しかし、2相系モデルにおいても間隙率が0.5以下のモデルに対して、又その土の構造、数種類の熱伝導率を持った土のモデル等に対して与えられる合成熱伝導率についての理論的根拠は検討を要する。

5、参考文献

- 1) 熊谷信昭 「電磁気学基礎論」 pp235~pp239
- 2) 「土の凍結—その制御と応用—」 pp52~pp56
- 3) Johansen's Method, CRREL MONOGRAPH 81-1 Thermal properties of Soils, Chapter 7 pp112~pp116