Ⅲ－16　新しい離散化モデルによる透水性地盤の変形解析

東北大学大学院　学生員　○清水幹夫
東北大学工学部　正　員　佐武正雄
東北大学工学部　正　員　岸野佑次

１．まえがき

従来、透水性地盤の変形解析を行う際に、有限要素法（ＦＥＭ）が用いられているが、要素の変形と間隙水圧の関連については、今なお工夫の余地があると考えられる。そこで、本研究においては、二相系材料の解析を行うために、間隙水圧の扱いの合理化を念頭におき、最小二乗法に基づく、修正有限要素法（以下、ＭＦＥＭと称する）の定式化を試みた。本文においてはその概要と、簡単な応用例を示す。

２．修正有限要素法の定式化

ＭＦＥＭは、解析の対象となる連続体を、まず、三角形の定ひずみ要素の集合体として離散化し、個々の要素に力の釣合い条件及び構成則を導入した後、要素間に生じた力の不釣合い量を最小二乗法を用いて最小化する、という手順により、最終的な連立一次方程式を得ようとするものである。以下にその概要を示す。

図－１に、分割された任意の要素ｅを示す。この要素における変位とひずみの関係は、行列を用いて次式で表される。

$$〔\varepsilon〕=〔B〕〔u〕 \qquad (1)$$

ここに、〔ε〕，〔ｕ〕，〔Ｂ〕はそれぞれ、ひずみテンソル、節点変位ベクトル、そしてひずみ－変位マトリックスである。

ＭＦＥＭでは、力は各要素の辺（枝）を通して伝達されるものと定義する。すなわち、図－１に示すように、要素に作用する力$\mathbf{f}_a$，$\mathbf{f}_b$，$\mathbf{f}_c$は、それぞれ各枝の中点ａ，ｂ，ｃに集中力として働く。これらの力を、枝力（branch force）と呼ぶ。

枝力と、要素の応力との関係は、次式で表される。

$$〔f〕=〔F〕〔\sigma〕 \qquad (2)$$

ここに、〔ｆ〕は枝力ベクトルを表し、$\mathbf{f}_a$；$\mathbf{f}_b$；$\mathbf{f}_c$の成分f_a，g_a；f_b，g_b；f_c，g_cを用いて、

$$〔f〕^T=〔f_a \;\; g_a \;\; f_b \;\; g_b \;\; f_c \;\; g_c〕$$

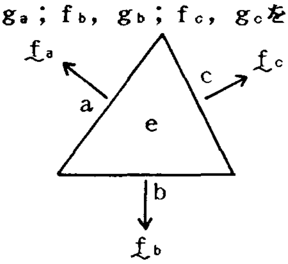
と定義される。〔σ〕，〔Ｆ〕はそれぞれ全応力テンソル、枝力－応力マトリックスである。

ここで、間隙圧が存在する場合には、全応力テンソル〔σ〕は、有効応力テンソル〔σ’〕と間隙圧〔ｐ〕との差で与えられるので、式（２）の〔σ〕は、次式で表される。

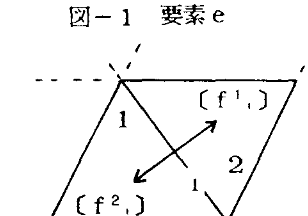
$$〔\sigma〕=〔\sigma'〕-〔p〕 \qquad (3)$$

なお、ここでは応力〔σ〕，〔σ’〕は引張を正、間隙圧〔ｐ〕は圧縮を正とした。

ＭＦＥＭでは、間隙圧は各要素に対して１つずつ求められる変数として扱う。したがって、各要素は定間隙圧要素と見なすことができる。これは、要素の各節点ごとの変数として間隙圧を扱うＦＥＭのやり方を合理化したものといえる。



図－１　要素ｅ



図－２　枝ｉに作用する２つの枝力

式（1），（2），（3）に加え、応力－ひずみ関係マトリックス〔D〕を与えれば、枝力は節点変位ベクトル〔u〕と間隙圧〔p〕を用いて、次式のように表すことができる。

$$〔f〕=〔F〕〔D〕〔B〕〔u〕-〔F〕〔p〕 \qquad (4)$$

なお、ここでは、構成則として、非弾性的挙動を考慮するために、従来の塑性ポテンシャルを用いた流れ則には依らず、散逸関数に基づく粒状体の流れ則[1]を採用することとした。

以上のように求められた枝力を用いれば、図－2のように、要素1，2が枝 i を共有して隣接している場合、枝 i における不釣合い力、すなわち残差〔G_i〕は、

$$〔G_i〕=〔f^1{}_i〕+〔f^2{}_i〕 \qquad (5)$$

と表される。ここに、〔$f^1{}_i$〕，〔$f^2{}_i$〕はそれぞれ要素1，2における、枝 i に作用する枝力である。式（5）の枝における残差は、1，2の両要素に均等に受け持たれるものと仮定する。したがって、図－1の、枝 a，b，c よりなる要素 e における残差 Δ_e は、

$$\Delta_e = \{〔G_a〕+〔G_b〕+〔G_c〕\} / 2 \qquad (6)$$

と書くことができる。なお、要素の枝が境界と一致する場合には、その枝における残差は1／2倍されることなく、直接要素に受け持たれるものとする。

要素における残差 Δ_e は、全要素にわたって合計され、次式のように最小二乗法を導入し、最小化する。

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \sum_e (\Delta_e \cdot \Delta_e) = 0 \qquad (7)$$

ここに u_i は節点変位成分を表す。式（7）より得られる変位に関する1次方程式と、間隙水の質量保存則、

$$〔\varepsilon_v〕= k / \gamma_w \ (\nabla \cdot \nabla 〔p〕) \qquad (8)$$

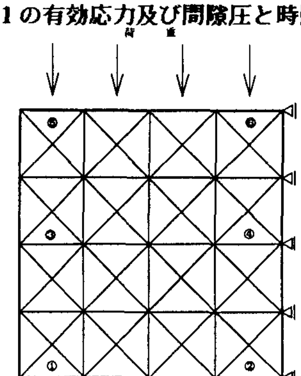
とを連立すれば、節点変位成分 u_i と間隙圧 p を独立変数とした連立一次方程式となり、解くことができる。ここに、〔ε_v〕は要素の体積ひずみ、k，γ_w はそれぞれ透水係数、水の単位体積重量である。

3．応用例

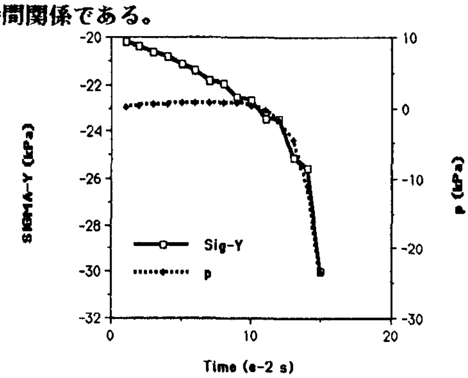
ここでは、図－3に示す要素分割で、土の圧縮試験のシミュレーションを行った結果の一部を紹介する。解析に用いた諸定数を表－1に示す。解析は0.01秒刻みで0.15秒間行った。入力荷重は、各時間ステップでの増分を0.1kNとし、初期拘束圧を等方的に、2.0kPaとした。また、透水は、境界上で、鉛直方向のみを許した。図－4は、図－3に示した要素1の有効応力及び間隙圧と時間関係である。

表－1　材料定数

ヤング率		2．67×10^5 kPa
ポアソン比		0．45
パラメーター	M	0．3
	N	1000
	K	1．0
透水係数		1×10^{-4} m/s
密　度ρ		2000 kg/m^3
水の密度ρ_w		1000 kg/m^3



図－3　境界条件及び要素分割



図－4 有効応力及び間隙圧時間関係

4．あとがき

本文においては、二相系材料の解析を行う目的で新たに提案した修正有限要素法の概要を示した。本方法については、なお検討の余地も残されているが、簡単な例題を通して、一応の解析を行い得ることを示した。なお、紙面の都合上、結果の詳細については、講演会当日発表する予定である。

参考文献　1）岸野佑次：散逸関数に基づく粒状体の流れ則の誘導，土木学会論文集第394号／Ⅲ-9,1988