II－77　SPECTRAL法による偏微分方程式の数値解法

東北学院大学　工学部　正　河野　幸夫
東北学院大学　工学部　学　○星　淳一

［序論］

土木工学の分野における多くの現象は、一般に常微分方程式や偏微分方程式によって表されている。偏微分方程式は、物理、化学、工学等に現れる多くの自然現象を表す道具であり、波動現象についても偏微分方程式で表すことができる。これまでの波の解析は、線形波の解析が主であったが、近年コンピューターの発達に伴い、線形波だけでなく非線形波動現象及び数値計算の精度の研究がますます注目をひきつつある。そこで、本研究は、コンピュータープログラミングを用いて微分方程式を解析し、精度を検討する。

［解析式及び解析方法］

解析式は、$U_t = U_{xx}$ である。これは、拡散方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial^2 x} \qquad (1)$$

で置き換えられる。ただし、初期条件を

$$U(x, 0) = f(x) \qquad (2)$$

とする。　U（x，t）がxについてフーリエ変換できるものとし

$$\widetilde{U}_{(k,x)} = \int_{-\infty}^{\infty} U_{(x,t)}\, e^{-ikx}\, dx \qquad (3)$$

$$U_{(x,t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{U}_{(k,t)}\, e^{ikx}\, dk \qquad (4)$$

とおく。（１）式の両辺をフリーエ変換する。（１）式の左辺の U（x，t）に（４）式を、また右辺に（４）式のxについての２回微分を代入して

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial t} - (ik)^2\, \widetilde{U}\right\} e^{ikx}\, dk = 0 \qquad (5)$$

となる。（５）式がゼロとなるには、｛　｝内がゼロにならなくてはならない。よって

$$\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial t} + k^2 \widetilde{U} = 0 \qquad (6)$$

が得られる。

関数　U（x，t）をフーリエ変換し、U（k，t）を求める。このとき、Uは複素数U（α＋βi）となって出てくるので、これを実数部U（α）と虚数部U（βi）に分ける。そして、実数部U（α）、虚数部U（βi）をそれぞれを（6）式に代入して、これをランゲ・クッタ法により解く。この時、時間刻み幅⊿tを０．１s、０．０５s、０．０１sと変化させて解析する。求めた実数部U（α）と虚数部U（βi）を再び複素数U（α＋βi）にもどし、これをフーリエ逆変換することにより U（k，t）から U（x，t）を求める。このことにより解が求まる。これがスペクトラル法

である。

初期条件として

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (7) \qquad f(x) = \cos x \quad (8)$$

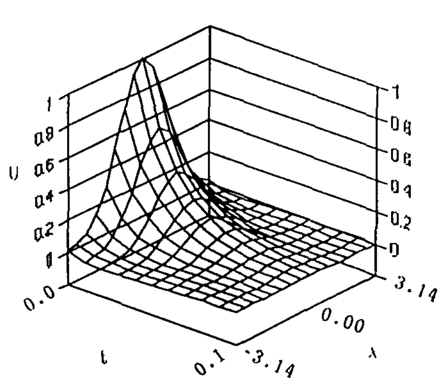
$$f(x) = \sin x \quad (9)$$

を与る。標本点波数ｘを８点、１６点、３２点と変化させ、この３式について解く。

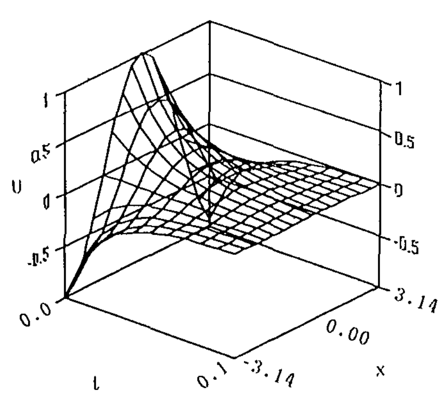
［結果］

（７）式、（８）式、（９）式とも、標本点波数ｘが８点の場合は、時間刻み幅⊿ｔを０．１ｓ、０．０５ｓ、０．０１ｓと変化させて解析したが、すべてが時間の経過とともに波が減少していく理想的な結果が得られ、同一時刻での Ｕ（ｘ，ｔ）の値はほぼ等しかった。ｘが１６点の場合は、⊿ｔが０．１ｓの時には波は減衰せずに増加し、⊿ｔが０．０５ｓ、０．０１ｓの時は波は減衰しているが同一時刻での Ｕ（ｘ，ｔ）の値に差が出た。またｘが３２点の場合、⊿ｔが０．１ｓ、０．０５ｓの時には波は増加し、⊿ｔが０．０１ｓの時に波が減衰した。

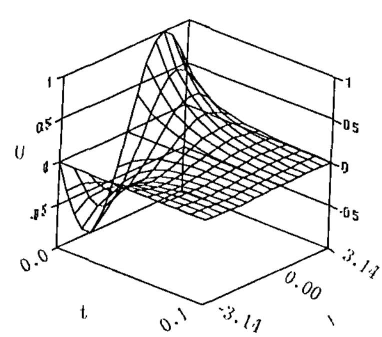
数値計算の精度と誤差は一般に、偏微分方程式の精度の性質は時間刻み幅⊿ｔと距離刻み幅⊿ｘとの比 ⊿ｔ／⊿ｘ によって決まり、また誤差は数値計算で誤差が生じたとき、それが各計算ごとに累積してくる、といわれている。やはり、誤差を少なくするには⊿ｔの値を小さくしそれに適した⊿ｘの値が必要である。本研究の解析は線形偏微分方程式であったが、今後は非線形偏微分方程式の精度の検討をする予定である。



$U_t = U_{xx}$　　$U(x,0) = e^{-\frac{x^2}{2}}$



$U_t = U_{xx}$　　$U(x,0) = \cos x$



$U_t = U_{xx}$　　$U(x,0) = \sin x$