Ⅱ－76　ＭＯＬ法による偏微分方程式の解法

東北学院大　学生員　○星　潤一
東北学院大　正　員　河野　幸夫

1　序論

偏微分方程式は物理現象の連続体としての記述に直結したもので、粒子系に対する常微分方程式と並んで、連続体に対する数学的枠組を与えている。従来は線形方程式の理論が中心であったが、近年非線形方程式の問題が大きな比重を占めるようになり、また解法の面では、数値解法が多用されるようになっている。今回は、偏微分方程式をＭＯＬ法を用いて解くことにした。ＭＯＬ法とは、ある軸方向に微分方程式を差分化することにより、他の軸方向には一次元の微分方程式いわゆる常微分方程式となり、この常微分方程式を数値解析することによって解が得られる。

2　問題

Navier-Stokes の方程式　$U_t + U U_x + V U_y + W U_z = F_x - 1/\rho P_x + \nu (U_{xx} + U_{yy} + U_{zz})$
からＸ軸方向のみ、またはＦ、Ｐを考えないものとする。
それらの条件より次の方程式を解くことにした。

①$U_t = U_{xx}$　②$U_t = U_{xx} - U_x$　③$U_t = -U U_x$　④$U_t = U_{xx} - U U_x$

初期条件は、$U(X, 0) = EXP(-0.5 \times X^2)$ とする。（ガウス分布）

3　解析

①$U_t = U_{xx}$を解く。

右辺U_{xx}は差分法を用いて、左辺U_t はAdames法を用いて解析する。

$$U_{xx} = u''(X_1) = \frac{U_3 - 2U_2 + U_1}{\Delta X^2} \qquad \text{（前方差分）}$$

$$U_{xx} = u''(X_i) = \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{\Delta X^2} \qquad \text{（中央差分）}$$

$$U_{xx} = u''(X_{100}) = \frac{U_{100} - 2U_{99} + U_{98}}{\Delta X^2} \qquad \text{（後方差分）}$$

predictor;　$U_t = u_{n,(0)} = u_{n-1} + h\sum_{i=1}^{k} \beta_{ki} f_{n-i}$

corrector;　$U_t = u_{n,(n+1)} = u_{n-1} + h\sum_{i=1}^{k} \beta^{\star}_{ki} f_{n-i} + h\beta^{\star}_{k0} f(u_{n,(m)})$

ここで、微小間隔h，時刻$n=0,1,2,3....$ 初期値$m=0$ から順に$m=0,1,2,3,..$

$f = u'$（差分したもの）

β_{ki}、$\beta^{\star}_{k0}$&$\beta^{\star}_{ki}$は一定、　$1 \leq i \leq k$

②③④も同様に解析する。しかし、波形が滑らかであるならばUt の解析をそのままAdames法を用いるが、波形がラフな場合はGear法を用いて解析する。

$$\text{predictor;}\quad Ut=\ u_{n,(0)}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\ u_{n-i}+\beta h u_{n-1}$$

$$\text{corrector;}\quad Ut=\ u_{n,(n+1)}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^{\star}\ u_{n-i}+\beta_0^{\star}\ h f\ (u_{n,(m)})$$

ここで、$u' = f(u,t)$, t=時間, $\alpha_1^{\star}$, α_i, β_1 & $\beta_0^{\star}$ は一定。 $1 \leqq i \leqq k$

n, m はAdames法同様

4 検討及び結果

①の方程式のUt の解析をAdames法のかわりに差分法を用いて解析した結果、初期値の波の崩れがAdames法を使った時より滑らかではなかった。このことは差分法で解くよりもAdames法で解くほうが精度がよいと思われる。以上①②③④の結果は、次のように3次元のグラフに書きました。また、これらの方程式の解法が可能であるということは、ソリトン波の方程式の解法も可能になったと思う。

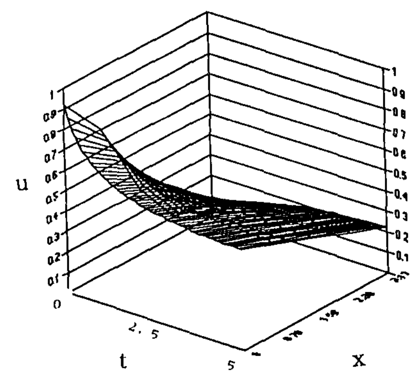

図1 Ut=Uxx

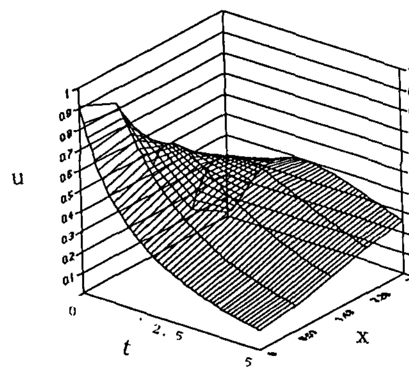

図2 Ut=Uxx-UX

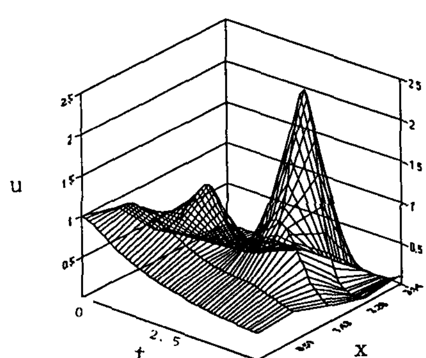

図3 Ut=-UUx

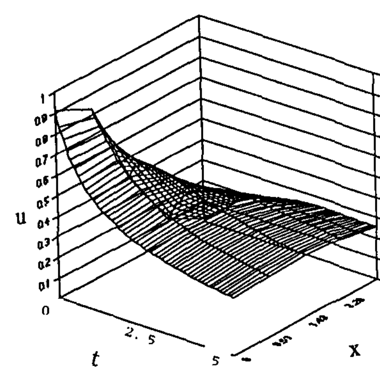

図4 Ut=Uxx-UUx

参考文献 1神部 勉著 偏微分方程式 講談社　2Erwin Kreyszig著 フーリエ解析と偏微分方程式 培風館