# Ⅱ－75　線形、非線形常微分方程式の数値解析

東北学院大学　工学部　正会員　河野　幸夫
東北学院大学　工学部　学正員　○菊池　晋

１．はじめに

急激に変化するような物理現象、例えば、衝撃波、ショックウェーブ、水撃圧等は、常微分方程式及び、偏微分方程式で表されることがしられている。これら、微分方程式の解析にはいろいろな方法がありますが、現在では、数値解析、つまりコンピューターによる解析が、主です。数値解析によって得られる解は実用的に必要な時もありますし、また、グラフを描く時などにも便利であると思われます。ただ数値解析を行ううえでの問題点として、解が不連続にしか得られないとか、誤差を生じやすいという点があります。そこで、本研究では、線形、非線形常微分方程式の数値解析を行い、得られる解がどれほどの精度なのか検討してみたいと思います。

２．解析方法

数値解析にはいろいろな方法がありますが、今回は、Ａｄａｍｓ法とＧｅａｒ法を使い数値解析を行ってみました。この２つの方法を、説明します。

１）Ａｄａｍｓ法

1.Ｐｒｅｄｉｃｔｏｒ

$Yn,(0)=\alpha 1\cdot Yn\text{-}1+h\Sigma(i=1,k)\beta ki\cdot fn\text{-}1$

2.Ｃｏｒｒｅｃｔｏｒ

$Yn,(m+1)=\alpha 1\cdot Yn\text{-}1+h\Sigma(i=1,k)\beta ki\cdot fn\text{-}1+h\beta k0\cdot f(Yn,(m))$

２）Ｇｅａｒ’ｓ　Ｓｔｉｆｆｌｙ　Ｓｔａｂｌｅ法

1.Ｐｒｅｄｉｃｔｏｒ

$Yn,(0)=\Sigma(i=1,k)\alpha i\cdot Yn\text{-}i+\beta 1h\cdot Yn\text{-}1$

2.Ｃｏｒｒｅｃｔｏｒ

$Yn,(m+1)=\Sigma(i=1,k)\alpha i\cdot Yn\text{-}i+\beta 0h\cdot f(Yn,(m))$

ここで、ｔ＝時間、ｈ＝段階の大きさ、ｎ＆ｍ＝反復回数、
$\beta ki,\beta k0$＆ $\beta ki$＝定数 、$\alpha i,\alpha i,\beta 1$＆ $\beta 0$＝定数である。

この２つの方法、Ａａｍｅｓ法、Ｇｅａｒ法はともに、Ｐ－Ｃ法を用いている。つまり、Ｐｒｅ－ｄｉｃｔｏｒ法により予測をし、Ｃｏｒｒｅｃｔｏｒ法により修正を行っている。このような方法であれば、かなり精度が良くなるとおもわれる。

Ａｄａｍｅｓ法、Ｇｅａｒ法の２つの方法の間にある主要な差は、次のようである。Ａｄａｍｅｓ法はｆが使われており、ｆは関数を分け与える傾斜である。ところが、Ｇｅａｒ法はｙを使っており、ｙは着実な方法である。

常微分方程式を解く場合は、Ａｄａｍｅｓ法は関数の曲線が相対的になめらかな時に使用され、Ｇ－ｅａｒ法は関数の曲線が複雑な時に使用される。

## ３．線形、非線形常微分方程式の数値解析

Ａｄａｍｓ法、Ｇｅａｒ法を用いて線形、及び、非線形常微分方程式の数値解析を行う。また、線形常微分方程式については、厳密解を求め、それと比較することによって精度がどれくらいであるのか検討し、図に示す。

### １）線形常微分方程式

(1)Ｕtt＋Ｕt＝０，(2)Ｕttt＋Ｕtt＝０，この２つの方程式の数値解析を行った。

B.C U(0)=1.0 ,U'(0)=1.0 ,U''(0)=1.0,

また、この２つの方程式の厳密解は次のようになる。

(1)Ｕ＝-ｅｘｐ（－ｔ）＋２，

(2)Ｕ＝ｅｘｐ（－ｔ）＋２ｔ

ここで数値解析によって得られた値と、厳密解によって得られた値を比較し精度の検討を行い、その結果を図１に示す。

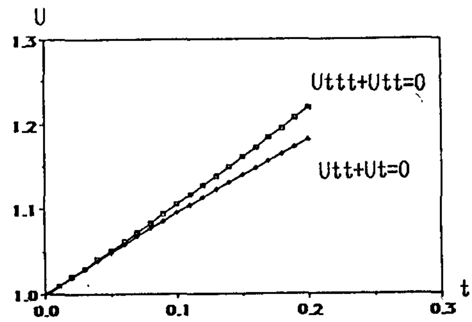

図1

２）

Ｕｔ＋１２ＵＵｔ＋Ｕｔｔｔ＝０　この方程式の数値解析を行った。

B.C U(0)=1.0,U'(0)=1.0,

また、U''(0)=0.1, 1.0, 3.0, -1.0, -3.0と変化させた。

Tout=0.01とした。（図2、3）

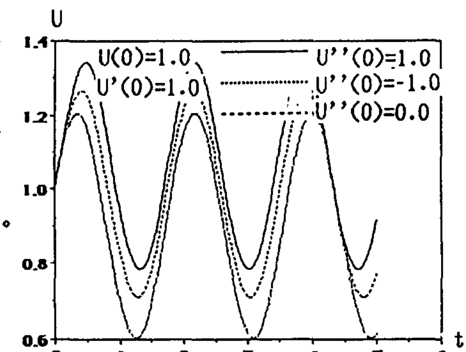

図2　Ut+12UUt+Uttt=0

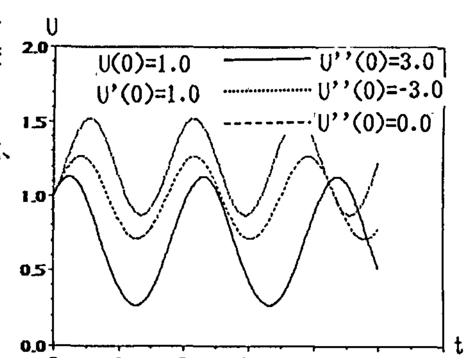

図3　Ut+12UUt+Uttt=0

## ４．検討及び結果

以上のように、Ａｄａｍｓ法、Ｇｅａｒ法、この２つの方法によって得られた値は、線形方程式についてだけであるが、厳密解の値と比較した結果ほとんど変わりなく、かなりの精度の良さを持っていることが分かった。ただ、今後の課題として、非線形方程式においての厳密解との比較が必要であるとおもいます。

以上の結果より、この２つの方法により、他のいろいろな方程式、ＫｄＶ方程式、Ｓｃｈｒｏｄｉｎｇｅｒ方程式、ｍａｒｃｈｅｎｋｏ方程式、Ｒｉｃｃａｔｉ方程式、Ｓ－ｉｎｅ－Ｇｏｒｄｏｎ方程式、などの方程式を解析するうえで、活用できるのではないかとおもう。また、偏微分方程式を解析する場合でも、常微分方程式の解析が重要なポイントになっているので、充分この解析方法を活用できるとおもいます。

### 参考文献

Ｅ．Ｋｒｅｙｓｚｉｇ著　「常微分方程式」，　田中　俊一，他著　「ＫｄＶ方程式」