II－73　波長の異なる長周期波の非線形干渉に関する考察
－津波と潮汐波の非線形干渉について－

東北大学　工学部　正員○今村文彦
東北大学　工学部　正員　首藤伸夫

１．はじめに

線形理論が成立すれば異なる波動成分はお互いに影響する事なく，合成波はその和として与えられる．しかし，水深が浅くなり非線形効果が生じてくると，相互の干渉が無視できなくなる．現在，津波解析は潮汐成分からの非線形干渉を考慮せずに行っているが，この干渉の効果を無視できない場合もあり，その影響を評価しておく必要がある．本研究は，２つの波動の非線形干渉の効果について，津波や潮汐などのような長周期波を対象にして，解析的手法により考察する．

２．非線形干渉の基礎式

ここでは，議論を簡単にするため，２つの仮定：［①１次元，水平床，進行波］，②［一方の潮汐成分（ ’を付ける）の影響は無視する］を設ける．今，１次元，水平床の仮定により，長周期合成波の基礎式は以下に示される浅水理論の式となる．

$$\text{連続の式：}\quad \frac{\partial(\eta+\eta')}{\partial t}+\frac{\partial(M+M')}{\partial x}=0, \qquad (1)$$

$$\text{運動の式：}\quad \frac{\partial(M+M')}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(M+M')^2}{h+\eta+\eta'}\right]+g(h+\eta+\eta')\frac{\partial(\eta+\eta')}{\partial x}=0$$

ここで，η,η'：水位，M,M':線流量，h:静水深（一定），g:重力加速度

さらに，②を仮定し，(1)式から潮汐成分の式（(1)式中で ’ のみの式）を差し引くと 津波成分の式が得られる．連続の式は通常の式と同じであるが，運動の式は

$$\underbrace{\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{M^2}{h}\left(1-\frac{\eta}{h}\right)\right]+g(h+\eta)\frac{\partial\eta}{\partial x}}_{\text{通常の運動量の釣合}}+\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2MM'}{h}\left(1-\frac{\eta}{h}-\frac{\eta'}{h}\right)-\left(\frac{M^2}{h}\frac{\eta'}{h}+\frac{M'^2}{h}\frac{\eta}{h}\right)\right]+g\frac{\partial}{\partial x}(\eta\eta')}_{\text{非線形干渉の項}}=0 \qquad (2)$$

となる．ここでは，水深波高比は小さいものとし，$1/(h+\eta+\eta')=1-(\eta/h)-(\eta'/h)$ なる関係を用いている．(2)式中の左辺 前半部が通常の浅水理論の運動量の式，後半部が潮汐による非線形干渉を表わす．

３．非線形干渉項の性質

(2)式中の非線形干渉項の性質を調べるため，次式に示す浅水理論の進行波の関係を用いて（①の仮定），線流量を水位に置き換える．

$$M=(h+\eta)u=(h+\eta)\sqrt{gh}\frac{\eta}{h}\left(1-\frac{\eta}{4h}\right)=\sqrt{gh}\,\eta\left(1+\frac{\eta}{h}\right)\left(1-\frac{\eta}{4h}\right) \qquad (3)$$

上式を(2)式に代入すると，移流項及び非線形干渉項に η について高次の項も含まれるため，ここでは２次まで考慮する．この時，(2)式は

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\sqrt{gh}\frac{1+3\left(\frac{\eta}{h}+\frac{\eta'}{h}\right)}{\left(1+\frac{3\eta}{2h}\right)}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{3g\frac{\partial\eta'}{\partial x}}{\sqrt{gh}\left(1+\frac{3\eta}{2h}\right)}\eta=0 \qquad (4)$$

と書き換えられる．上式は移流方程式に相当し，左辺第二項のη'/h（潮汐の波高水深比）及び第三項が新たに付加され，これが非線形干渉による作用を示すものである．第二項が有限振幅性による分散効果を，第三項が波高増加・減衰の効果を持つ．後者では，$\partial\eta'/\partial x$ が正の時に波高は減少，負の時に波高は増加する．

線形理論では，伝達速度の変化により波高が変化するが，非線形の場合には，伝播速度と波高変化はそれぞれ独立であることが分かる．ただし，２つの非線形干渉ともその効果は波高水深比で決まる．伝播速度は次式で示されるように２つの波動の波高水深比で表わされ η'/h が η/h に対して小さければ，潮汐による非線形干渉は無視できる．実際に，津波のみの場合と(4)式の場合の位相速度の比をとると

$$\sqrt{gh}\frac{1+3\left(\frac{\eta}{h}+\frac{\eta'}{h}\right)}{\left(1+\frac{3\eta}{2h}\right)}\Bigg/\sqrt{gh}\frac{1+3\frac{\eta}{h}}{\left(1+\frac{3\eta}{2h}\right)}=\frac{1+3\left(\frac{\eta}{h}+\frac{\eta'}{h}\right)}{\left(1+\frac{3\eta}{h}\right)} \qquad (5)$$

となる．一方，波高変化の項は単純ではないため，次のような操作を行いその効果を評価する．まず，次式のように三角関数で与えられる進行波を考える．

$$\eta = a\sin\omega,\quad \eta' = a'\sin\omega',\quad \omega=\{k(x-ct)\},\quad \omega'=\{k'(x-c't)\} \tag{6}$$

ここで，a, a'：振幅，k, k'：波数，c, c'：位相速度，ω, ω'：位相．
この関係式を(4)式左辺第三項に代入すると

$$\sqrt{gh}\,\frac{1}{\left(1+\frac{3a}{2h}\sin\omega\right)}\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{a'}{a}\right)(k'h)\,\sin\omega\,\cos\omega' \quad \sim \quad \sqrt{gh}\,\frac{1}{\left(1+\frac{3a}{2h}\right)}\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{a'}{a}\right)(k'h) \tag{7}$$

と書き直される．波高水深比に加えて潮汐の波長水深比が関係してくる．さらに，(4)式の左辺第二項中にある線形の圧力項 $\sqrt{gh}\ \partial\eta/\partial x$ との比は次のようになる．

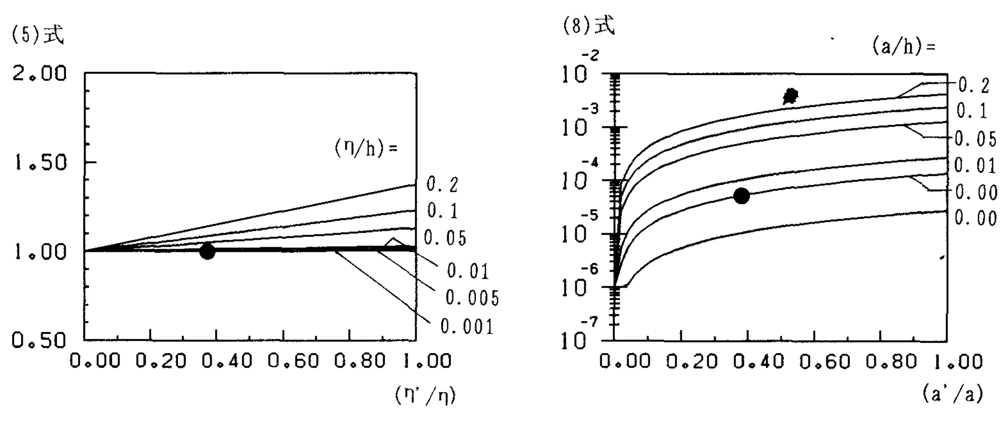
$$\frac{\text{(4)式第三項}}{\text{線形の圧力項}} \sim \frac{1}{1+\frac{3a}{2h}}\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{a'}{a}\right)\left(\frac{k'}{k}\right) \tag{8}$$

図－１は，横軸に津波に対する潮汐の振幅の比をとり，(5)式と(8)式の値を具体的に求めた結果である．なお，(8)式中の波数の比(k'/k)は，津波と潮汐の周期をそれぞれ20分と半日として，線形理論により求めている．いずれも，津波と潮汐の波高水深比が分かれば，非線形干渉の大きさが推定できる．(8)式には津波と潮汐の波数の比が含まれておりこの値が小さいため，(8)式はほぼ無視できる大きさであると分かる．しかし，(5)式は，津波の波高水深比が大きければ（0.1以上），10%程度の影響を生じるので注意を要する．

以上の結果は，進行波を仮定しているので湾内での津波については扱えないが，海峡などを通過する場合に仮定は成立する．例えば，津軽海峡では大潮差が0.7m程度，1741渡島大島津波（この海峡を通過した津波としては最大級）の第１波は1.0m程度の波高で来襲してきた．従って，a'/a=0.35，a/h=1.0/200=0.005 の値をとり，図－１中の黒印となる．比較的潮汐成分が大きいカナダ西海岸沿いでは1.0m程の振幅を有するが，津波の波高振幅比が渡島大島と同規模であれば，非線形効果は小さく無視できる．

４．おわりに

以上，２つの波動の非線形干渉効果としては(4)式で示され，その大きさは(5)，(8)式で与えられる．この効果は，津波の水深波高比と２つの波動の振幅の比により図－１から評価できる．１次元進行波の仮定により，適用できる範囲は限定されるが，簡便に非線形効果の影響を見積ることが出来た．今後，②の仮定を設けない解法についても検討が必要である．



図－１　非線形干渉効果の大きさ