

I-19 箱形断面はりの弾塑性状態における shear lag

秋田大学 正員 薄木 征三
秋田大学 学生員 中川 達也

1. まえがき

鋼など金属材料から成る薄肉断面部材の終局耐力を支配するのは、座屈と断面の塑性化であることはよく知られるところである。はりの断面寸法に比べ部材長さが10倍程度以下のはり、連続けた支点近傍及びラーメンの隅角部など曲げモーメントが急変する部材位置ではせん断遅れ(shear lag)による断面内の直応力のはり理論からの差異が無視できないことは、弾性理論において明らかにされている。弾塑性問題に置けるせん断遅れ現象の解明は終局耐力よりもむしろ使用限界状態(serviceability limit)を明らかにする上で重要である。本報告では二軸対称鋼箱げた断面はりの一軸曲げを対象として、せん断変形を考慮した断面内の弾塑性境界を定める支配方程式を提示する。最後に既往のはり理論と比較する。

2. 変位場

弾性問題でのせん断変形を考慮した（高次理論）変位場を基礎とする。

$$\text{変位 } u(x, y, z) = -zw' + \frac{E}{G} B_z W \quad (1)$$

$$\text{ひずみ } \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -zw'' + \frac{E}{G} B_z W' \quad (2)$$

$$\text{応力 弾性領域 } \left. \begin{array}{l} \sigma_x = E \varepsilon_x \\ \tau_{yz} = G \gamma_{yz} \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$\text{塑性領域 } \left. \begin{array}{l} \sigma_x = \pm \sigma_y \\ \tau_{yz} = 0 \quad (\gamma_{yz} \neq 0) \end{array} \right\} \quad (4)$$

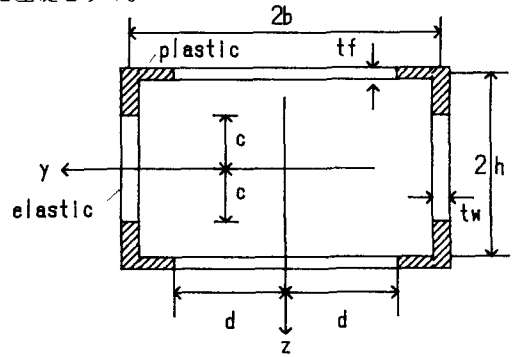


図-1. 高次理論での弾塑性境界図

3. 断面力-変位関係

以下の3種類の断面力が必要となる。

$$\begin{aligned} M_x &= \int_F \sigma_x z \, dF = \int_{F_e} E \varepsilon_x z \, dF + \int_{F_p} \pm \sigma_y z \, dF \\ &= E \left(-J_e w'' + \frac{E}{G} K_e W' \right) + \sigma_y Z_p \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} H_y &= \int_F \sigma_y \frac{E}{G} B_z \, dF = \int_{F_e} E_{\partial} \varepsilon_x B_z \, dF + \int_{F_p} \pm \sigma_y \frac{E}{G} B_z \, dF \\ &= E_{\partial} \left(-K_e w'' + \frac{E}{G} R_e W' \right) + \frac{E}{G} \sigma_y V_p \end{aligned} \quad (6)$$

$$T_z = \int_F \tau_{yz} \frac{E}{G} \frac{S_z}{t} \, dF = E_{\partial} D_e W \quad (7)$$

ここで断面定数は以下のものであり、図2は座標 $B_z(s)$ で図中の値は $b=14.4\text{cm}$, $h=7.5\text{cm}$, $t_f=0.45\text{cm}$, $t_w=0.6\text{cm}$ で計算。

$$\left. \begin{aligned} [J_e \quad K_e \quad Z_p] &= \int_{F_e} \left[z^2 \quad B_z z \quad \pm z \right] \, dF \\ [R_e \quad D_e \quad V_p] &= \int_{F_e} \left[B_z^2 \quad \left(\frac{S_z}{t} \right)^2 \quad \pm B_z \right] \, dF \\ [E_{\partial} \quad E_{\partial\partial}] &= \left[\frac{E}{G} \quad \frac{E}{G^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

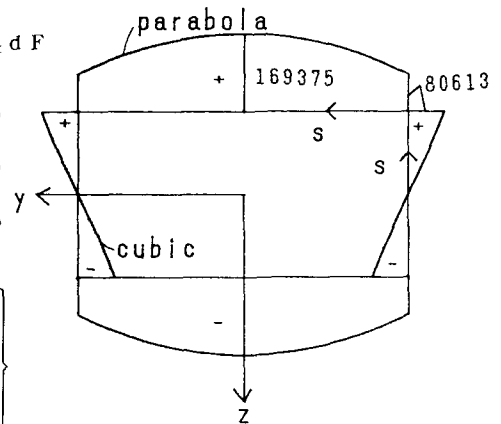


図-2. B_z coordinate

4. 弾塑性境界 $c(z)$ 、 $d(z)$

弾塑性境界 $c(z)$ 、 $d(z)$ は外力のつり合いから得られる曲げモーメント $M_x(x)$ の分布から解くことはできない。(3)式において応力分布の断面内の対称性より $z = c$ で $\sigma_x = \sigma_y$ 、及び $z = h$ 、 $y = d$ で $\sigma_x = \sigma_y$ とおくと、

$$\frac{\sigma_y}{E} = -c w'' + \frac{E}{G} B_{zc} W' \quad (9)$$

$$\frac{\sigma_y}{E} = -h w'' + \frac{E}{G} B_{zd} W' \quad (10)$$

ここに、 $B_{zc} = B_z(z=c)$ 、 $B_{zd} = B_z(y=d)$ である。

(9)と(10)式より w'' と W' を消去すると(12)式ようになる。

$$\frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{E\Lambda} [(-h B_{zc} + c B_{zd})(M_x - \sigma_y Z_p) + \sigma_y (h K_e - J_e B_{zc})] \quad (11)$$

ここで Λ は(14)式である。

つりあい式 $H_y' - T_x = 0$ と(7)式より、

$$T_x = E_g D_e W = H_y'$$

$$W = \frac{H_y'}{E_g D_e} \quad (12)$$

(9)と(10)式より求めた w'' と W' を(6)式に代入し H_y を求める。もとめた H_y を z に関して微分し(11)に代入し、さらに両辺を z で微分すると次式ようになる。

$$W' = \left[\frac{1}{E D_e} \left\{ \frac{1}{\Lambda} (\sigma_y \Omega_I + M_x \Omega_{II}) \right\} \right]' = \frac{G}{E^2 \Lambda} (c M_x - \sigma_y J_e - c Z_p \sigma_y) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Omega_I &= K_e^2 - R_e - Z_p \Omega_{II} + \Lambda V_p \\ \Omega_{II} &= c R_e - K_e B_{yc} \\ \Lambda &= c K_e - J_e B_{yc} \end{aligned} \quad (14)$$

結局(11)、(13)式が弾塑性境界 c 、 d に関する二元連立微分方程式となる。

5. 初等理論

(13)式において $W' = 0$ つまりせん断変形を無視すると次式ようになる。

$$c M_x - \sigma_y J_e - c Z_p \sigma_y = 0 \quad (15)$$

ここで(8)式において $d = 0$ とおくと (図3 参照)

$$J_e = \frac{4}{3} c^3 t_w, \quad Z_p = 2(h^2 - c^2) t_w + 4 h b t_f \quad (16)$$

(15)式に(16)式を代入すると

$$c M_x - \sigma_y (2 h^2 t_w + 4 h b t_f - \frac{2}{3} c^3 t_w) = 0 \quad (17)$$

ここで、 $2 h^2 t_w + 4 h b t_f$ は塑性断面係数 Z に等しい。従って弾塑性境界 c は、

$$c = \pm \sqrt{\frac{3}{2} \frac{Z}{t_w} \left(1 - \frac{M_x}{M_o}\right)} \quad (18)$$

これは初等はり理論と一致する。

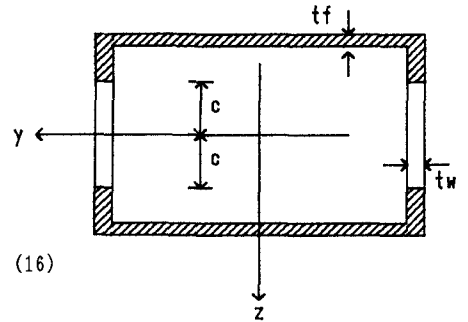


図-3. 初等理論での弾塑性境界図