Ⅰ－16　空間骨組の弾性有限変位解析

東北大学　○学生員　後藤文彦
東北大学　　正員　倉西　茂
東北大学　　正員　岩熊哲夫

１．まえがき

有限変位解析には主に対象物体の任意の変形状態を標構にするupdated-Lagrange手法と、ある初期状態を標構にするtotal-Lagrange手法とがあり、それぞれ一長一短がある。total-Lagrange手法により導かれる支配方程式は一般に高次非線形微分方程式となり、そのままの形での有限要素化は困難であるが、それを克服すべく考案された手法として剛体変位除去の手法がある。剛体変位除去法とは、極分解の定理に基づき、全変位から部材要素の実質変形に関与しない変位「剛体変位」を座標変換によって分離除去し、要素の剛体変位とともに移動する要素座標系での部材端力学量を、微小変位理論や低次非線形理論の剛性マトリクスによって表す方法である。この方法には、対象とする問題の変位の大きさに制約がないという利点がある。但し、３次元空間での有限回転角は、微小変位理論において扱っているように線形ベクトル空間上になく、その回転角成分を適切に定義することが重要である。本報告では、この剛体変位除去法により定式化した剛性方程式を用いて座屈前の変位に制約を設けずに、解析解のあるいくつかの座屈解析を行った。

２．変位場

本解析に用いた変位場は次式のように表される。

$$u_1=u(z)+x(\cos\phi\cos\gamma-\sin\phi\sin\alpha\sin\alpha\sin\gamma-1)+y(-\sin\phi\cos\gamma-\cos\phi\sin\alpha\sin\gamma)+\omega(x,y)\kappa_p\cos\alpha\sin\gamma$$
$$u_2=v(z)+x(\sin\phi\cos\alpha)+y(\cos\phi\cos\alpha-1)+\omega(x,y)\kappa_p\sin\alpha$$
$$u_3=w(z)+x(-\cos\phi\sin\gamma-\sin\phi\sin\alpha\cos\gamma)+y(\sin\phi\sin\gamma-\cos\phi\sin\alpha\cos\gamma)+\omega(x,y)\kappa_p\cos\alpha\cos\gamma \qquad (1)$$

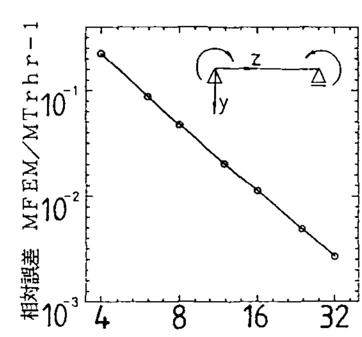
ここに$u(z),v(z),w(z)$はz-軸のそれぞれの変位成分、α，γ，ϕはEuler角で表わした棒部材軸の回転角成分、ωは断面の単位そり関数、κ_pは軸のねじれ率である。

３．数値解析の定式化

有限要素法を用いた空間骨組を解析する場合には、微小変位理論で用いられる空間固定直角座標３軸回りの回転角成分を形式的に用いた方が、常に同じ座標系を基準にしているために扱いが容易になる。この３軸回りの有限な回転角成分を数学的に定義することはできないが、増分の形でなら表すことができる。つまり、式(1)の変位場を用いて導いた仮想仕事式において、この３軸回りのモーメント外力と仕事をする回転角成分は、Euler角と次式のような関係で与えられる。

$$\begin{bmatrix}\Delta\theta_x\\ \Delta\theta_y\\ \Delta\theta_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\cos\gamma & 0 & \sin\gamma\cos\alpha\\ 0 & 1 & \sin\alpha\\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma\cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\alpha\\ \Delta\gamma\\ \Delta\phi\end{bmatrix} \qquad (2)$$

この関係を用いれば、直角座標３軸回りの有限回転角成分で表した剛性方程式を増分式の形で与えることができる。但し、式（１）から求めた座標変換マトリクスはEuler角の関数の形で与えられているので、接線剛性マトリクスを解いて得られる回転角成分の増分$\Delta\theta_x$,$\Delta\theta_y$,$\Delta\theta_z$から、式(2)の逆関係を用いてEuler角の増分を求めることが必要である。こうした一連の繰り返し収束計算に



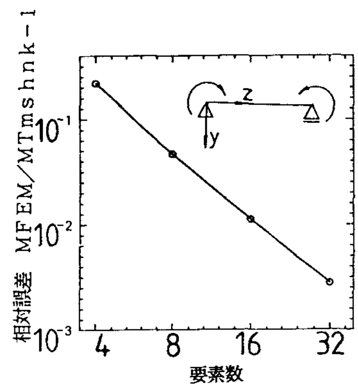
図－１　直線ばりの横倒れ座屈

は、弧長法を用いた。

4．数値解析例

（１）等曲げを受ける単純支持直線ばりの弾性横倒れ座屈

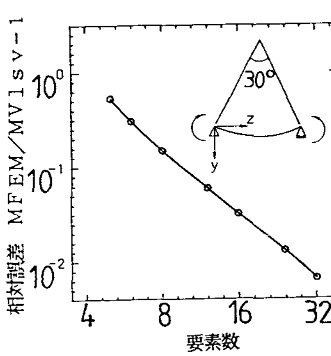
直線ばりの横倒れ座屈に対する数値解をTrahair et al.[1]の解析解で無次元化した値と有限要素分割数の関係を図－１に示した。本数値解はTrahairの解析解に収束している。次に座屈前の面内変位の影響を除去するために強軸回りの断面二次モーメントI_xを無限大としたたわまない仮想的なはりに対する数値解をTimoshenko[2]の解析解で無次元化した値と要素数との関係を図－２に示した。面内変位の影響を無視するとTimoshenkoの解析解に収束することが分かる。



図－２　直線ばりの横倒れ座屈（Ｉｘ→∞）

（２）等曲げを受ける単純支持円弧曲がりばりの弾性横倒れ座屈

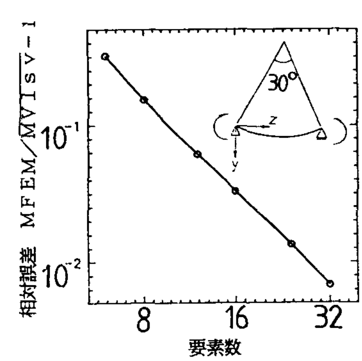
円弧曲がりばりの横倒れ座屈に対するVlasov[3]の解析解には座屈前面内変位の影響が考慮されていないので、まずI_xを無限大としたたわまないはりに対する数値解をVlasovの解析解で無次元化した値と要素数の関係で図－３に示した。本数値解は面内変位を無視した場合にはVlasovの解析解に収束している。次にVlasovの解析解に面内変位の影響を含めるために、実際の曲率(1/R)＝初期曲率(1/R_0)＋面内変位による曲率(M_{cr}/EI_x)を代入することによって公式の改善を行う。これはM_{cr}についての６次方程式になるので、数値的に解いてその解を$\overline{M_{visv}}$とした。この$\overline{M_{visv}}$で無次元化した数値解と要素数の関係を図－４に示した。本数値解は$\overline{M_{visv}}$に収束している。



図－３　円弧曲がりばりの横倒れ座屈（Ｉｘ→∞）

5．あとがき

各種横倒れ座屈公式の理論的適用範囲を確認した。曲がりばりに対しても座屈前面内変位の影響を考慮した解を得ることができた。



図－４　円弧曲がりばりの横倒れ座屈

参考文献

1)Vacharajittiphan,P.,Woolcock,S.T.&Trahair,N.S.:Effect of In-Plane Deformation on Lateral Buckling,j.Struct.Mech., Vol.3.No.1,pp.29-60,1974

2)Timoshenko,S.P.&Gere,J.M:Theory of Elastic Stability, Second Edition McGraw-Hill,1963

3)Vlasov,V.Z.:Thin-Walled Elastic Beams,Israel Program for Scientific Translations,Jerusalem,1961