

IV—1 三角測量における四辺形調整について覚書

八戸工業大学 正会員 岩淵清行

1. まえがき

わが国の国土地理院は伝統的に方向補正法によって四辺形調整を行なっている。ところでミカイルは、角補正法の解公式に重み係数行列を使って方向補正法解公式を導き出している。この覚書はミカイルの本¹⁾によってそれを紹介するものである。

2. 予備知識

（第1図参照）点A, B, C, DのうちAとDは既知点、BとCは求点である。 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_8$ はいわゆる挟角で、 $H_1, H_2, \dots, H_{12}$ は方向角である。 θ_i と H_j との関係は図より明らかに

$$\begin{aligned}\theta_1 &= H_1 - H_2, & \theta_2 &= H_2 - H_3 \\ \theta_3 &= H_4 - H_5, & \theta_4 &= H_5 - H_6 \\ \theta_5 &= H_7 - H_8, & \theta_6 &= H_8 - H_9 \\ \theta_7 &= H_{10} - H_{11}, & \theta_8 &= H_{11} - H_{12}\end{aligned}$$

である。そして θ_i の最確値を $\theta_i + \Delta\theta_i$, H_j の最確値を $H_j + \Delta H_j$ とすると

$$\begin{aligned}\Delta\theta_1 &= \Delta H_1 - \Delta H_2, & \Delta\theta_2 &= \Delta H_2 - \Delta H_3 \\ \Delta\theta_3 &= \Delta H_4 - \Delta H_5, & \Delta\theta_4 &= \Delta H_5 - \Delta H_6 \\ \Delta\theta_5 &= \Delta H_7 - \Delta H_8, & \Delta\theta_6 &= \Delta H_8 - \Delta H_9 \\ \Delta\theta_7 &= \Delta H_{10} - \Delta H_{11}, & \Delta\theta_8 &= \Delta H_{11} - \Delta H_{12}\end{aligned}$$

ここに ΔH_1 と ΔH_{12} は0である。さて、角補正法のときの条件方程式は

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^8 (\theta_i + \Delta\theta_i) - 2\pi &= 0 \\ \theta_1 + \Delta\theta_1 + \theta_8 + \Delta\theta_8 - (\theta_4 + \Delta\theta_4 + \theta_5 + \Delta\theta_5) &= 0 \\ \theta_2 + \Delta\theta_2 + \theta_3 + \Delta\theta_3 - (\theta_6 + \Delta\theta_6 + \theta_7 + \Delta\theta_7) &= 0\end{aligned}$$

$$\Pi \text{ 奇数 } \sin(\theta_i + \Delta\theta_i) / \Pi \text{ 偶数 } \sin(\theta_j + \Delta\theta_j) - 1 = 0$$

線形化して行列形式で整理すると $[A][\Delta\theta] = [f]$ のかたちになる。但し

$$[A] \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ C_1 - C_2 & C_3 - C_4 & C_5 - C_6 & C_7 - C_8 & & & & \end{bmatrix}, [f] \equiv \begin{bmatrix} 2\pi - \sum_{i=1}^8 (\theta_i) \\ \theta_4 + \theta_5 - \theta_1 - \theta_8 \\ \theta_6 + \theta_7 - \theta_2 - \theta_3 \\ 1/Z - 1 \end{bmatrix}$$

ここに $C_i \equiv \cot(\theta_i)$, $Z \equiv \Pi \text{ 奇数 } \sin(\theta_i) / \Pi \text{ 偶数 } \sin(\theta_j)$

3. 重み係数行列を使った方向補正法の解公式

観測精度は等しいとして、8個の挟角に対する重み係数行列 $[Q]$ は

$$[Q] \equiv \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[Q_t] \equiv [Q] [A]^T$$

$$[Q_e] \equiv [A] [Q_t]$$

$$[W] \equiv [Q_e]^{-1}$$

$$[\lambda] \equiv [W] [f]$$

$$[\Delta\theta] \equiv [Q_t] [\lambda]$$

とおくと、ラグランジュの未定係数 λ_k は

そして、 θ_i の補正量 $\Delta\theta_i$ は、

で計算される。かくして $\theta_i + \Delta\theta_i$ により、

θ_i の最確値がもとめられる。この結果が従来 ΔH_j を未知数とする条件方程式の解と同じになる事は数式的に証明される。なお重み係数行列を単位行列とすれば当然ながら普通のテキストに書かれている等精度観測のときの角補正法解公式となる。

4. 参考文献

- 1) Mikhail, E., OBSERVATIONS AND LEAST SQUARES, 1982, pp. 151-159.

第 1 図

