Ⅲ－７　修正応力を用いた砂の異方性の表現

八戸工業大学　正会員　飛田　善雄

１．まえがき

砂の変形・破壊挙動は、異方性に大きく影響されることが知られている。異方性の影響を構成式の中に取り入れるためには、例えば、ファブリックテンソルの様な２階のテンソルを導入し、客観性の原理による等方関数の表現定理を用いれば、式の形の大枠を定めることができる（ Tobita, 1989)。しかし、この様にして得られた式は、基本的な問題の議論には役立っても具体的な構成式の導入には非力である。そこで修正応力を用いて、異方性を表現する方法を提案する（ Tobita & Yanagisawa, 1990)。本手法は殆どの構成関係に用いることができるが、ここでは、降伏条件に関する議論を中心とする。

２．一般化された修正応力

先にTobita(1988)により定義された修正応力：

$$T_{ij} = (F_{ik})^{-1}\sigma_{kj} \qquad (1)$$

を数学的に拡張する。すなわち、ファブリックテンソルにより定義される４階のテンソルを用いて応力の線形変換を考える、

$$T_{ij} = L_{ijkl}(\boldsymbol{H})\,\sigma_{kl} \qquad (2)$$

等方関数の表現定理を用いて具体的にこの式を記述すると、

$$\begin{aligned}
T_{ij} = {} & a_1\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{H})\delta_{ij} + a_{10}\sigma_{ij} \quad \text{---------- (a)} \\
& + a_4\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})H_{ij} + a_7\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})H_{ik}H_{kj} \quad \text{--- (b)} \qquad (3) \\
& + a_2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{H\sigma})\delta_{ij} + a_5\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{H\sigma})H_{ij} + a_8\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{H\sigma})H_{ik}H_{kj} \\
& \quad \text{--- (c)} \\
& + a_{11}(\sigma_{ik}H_{kj} + H_{ik}\sigma_{kj}) \\
& + a_3\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{H}^2\boldsymbol{\sigma})\delta_{ij} + a_6\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{H}^2\boldsymbol{\sigma})H_{ij} + a_9\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{H}^2\boldsymbol{\sigma})H_{ik}H_{kj} \\
& + a_{12}(\sigma_{ik}H_{kl}H_{lj} + H_{ik}H_{kl}\sigma_{lj})
\end{aligned}$$

の様になる（後の議論に便利な様に、配列を変更している）。

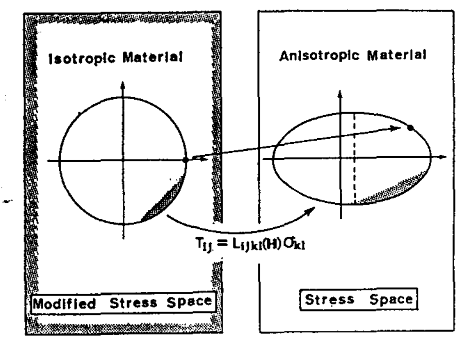
３．基本的な手法

提案する手法は極めて簡単なアイデアに基づくものである。手順を示すと（図－１参照）、

１）（３）式により定義された修正応力空間で、過去に提案されている等方的な降伏条件を考える。例えば、von-Mises, Drucker & Pragerなど。

２）（３）式を代入して通常の応力空間上の関数形を求める。

３）この時、ファブリックテンソルが異方的であれば、応力空間上では異方的な降伏条件となっている。



図－１：修正応力法の概念図

（３）式のうち、どこまでの項を考えるかに依って降伏条件のタイプが変化する。この方法はBoehler (1987)により初めて提案された手法であり、金属材料についてはよい結果を与えることが検証されている。摩擦性材料に対する検証および修正応力の物理的意味に対する検証は行われていない。

４．修正応力の種類と降伏条件の特性

（３）式において、（ａ）項のみを考えると、応力空間では常に等方的な降伏条件が得られる。通常の等方硬化モデルでは、$a_{10}\sigma_{ij}$のみが考慮されている。　さらに、（ｂ）項まで含めると、”移動＋等方”硬化モデルを表現することになる。さらに、（ｃ）項以下を含めると塑性変形中の形状変化を伴う降伏条件となる（詳しくは文献４）参照）。　砂の様な粒状体の降伏曲面が塑性変形中に異方性の卓越により形状変化をもたらすことは自然と考えられる。物理的考察に基づいて得られたオリジナル修正応力（式（１））を用いると、最も簡単な形で形状

変化を伴う異方的降伏条件を得ることができる（以上、図－２参照）。

5．修正応力法の利点

修正応力法に基づいて異方的降伏条件を導入したときの利点について述べる。

１）従来の等方硬化モデルがそのまま修正応力空間で使用できる。

２）修正応力を決定する段階で、物理的な意味を考察することができる。

３）数学的演算において必要なものは、次の微分鎖則のみである。

$$\frac{\partial f^*}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f^*}{\partial T_{kl}} \frac{\partial T_{kl}}{\partial \sigma_{ij}}$$

４）ファブリックテンソル$\underset{\sim}{H}$の主軸が応力テンソル$\underset{\sim}{\sigma}$の主軸と一致しないときには塑性ひずみ速度成分が応力成分に対して、非共軸性を持つ性質を簡単に導入できること。例えば、２次元応力状態を考えた図－３では、$\underset{\sim}{H}$と$\underset{\sim}{\sigma}$の主軸が一致しない時には、構造主軸の座標系で応力$\underset{\sim}{\sigma}$はA点として与えられる。A点に関して流れ則を用いて塑性ひずみ速度成分を求めると、降伏条件が異方性をもつ楕円であるので、$\psi \neq \delta$であり非共軸性を有することが解る。

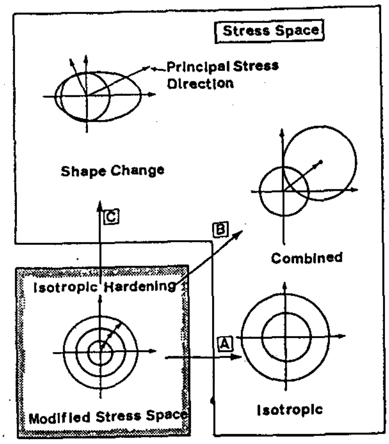
また、主応力回転時の塑性変形挙動も図－３（b）より理解できる様に表現可能となる。

以上の結果は、数学的には微分演算の結果、塑性ひずみ速度が応力のみならずファブリックテンソルの関数になっていることを意味している。

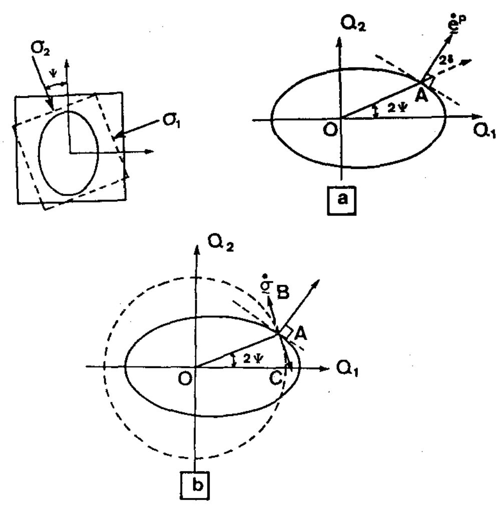
５）ほとんどの構成関係（弾性マトリックス、弾性ポテンシャルの定義、塑性ポテンシャルの決定、硬化関数の決定など）に適用することができる。

6）あとがき

以上の性質は、修正応力法を用いて、構成式に体系的に異方性の導入が可能であることをを示している。”移動＋等方”硬化モデルと比較すると、数学的な演算は多少厄介になるが、形状変化が簡単に導入できる点を考慮すると、今後の構成モデルの定式化を考える上で極めて有効な手法であると考えている。現在、どの程度の精度で異方性の影響を表現できるかについて、二重すべりモデル、弾塑性モデルについて検討中である。



図－２：修正応力の種類と降伏関数の特性



図－３：異方性を有する降伏関数の性質：ファブリックテンソルと応力の主軸が一致しない場合

謝辞：本研究の成果の一部は文部省科学研究費（奨励研究Ａ）の補助を受けて行ったものである。

参考文献

1)Boehler(1987):Applications of tensor functions in solid mechanics, Springer Verlag

2) Tobita(1988): S & F,28,2,pp.113-126

3) Tobita(1989): S & F, 29,4,pp.91-104

4) Tobita & Yanagisawa(1990): Modified stress tensor in anisotropic yield condition for granular materials (being submitted to S & F)