

III-2 粒状体の3次元グラフ理論解析

東北大学工学部 ○学生員 松井 淳
同 上 正 員 佐武 正雄

1. はじめに：粒状体の基本的特徴は、粒子性である。その中で、粒子の充てんについては、間隙率や、接触数を計測するような、実験的・統計的研究が、多くなされてきた。また、筆者はグラフ理論による考察を行ってきたが、従来のものは2次元であり、3次元の場合は、2次元と比較して、解明されていない点を多く残している。本文は、グラフ理論による解析を、2次元理論から3次元に拡張するための考察を行ったものである。

2. 2次元理論：2次元での粒状体のグラフへの置き換えでは、粒子・接触点・間隙がそれぞれグラフの点・枝・ループに対応している。（図-1参照）さらに、図-1での鎖線（仮想枝）は、現在は、接触していないが、将来接触する可能性が高い粒子同士であることを示し、粒子1個当たりの平均的な接触点の数は、配位数(coordination number)、仮想枝の数は、余裕数(redundancy number)と呼ばれ、この2つの数の間には、関係式が求められている。次に、行列による解析では、点と枝、枝とループの図形的関係を表す行列としてそれぞれ接続行列 D_{ij} 、ループ行列 L_{jk} が用いられている。（ i, j, k は、それぞれ点、枝、ループに対応する指標）ループは、時計まわりを正とする。このとき、

$$D_{ij} L_{jk} = 0 \quad (1)$$

$$L_{kj} D_{ji} = 0 \quad (2)$$

が、成り立つ。（ここで、 j について、和をとる）また、双対グラフとの間には、

$$D_{jk} = -L_{jk} \quad (3)$$

$$L_{ij} = D_{ji} \quad (4)$$

が成り立つ。次に、回転を考慮に入れた相対変位（修正相対変位） Δu_j は、粒子の半径を r 、回転を w 、変位を u 、隣接していた2つの粒子の半径の和を l_j とすると、

$$\Delta u_j = \Delta u_j + l_j u_j \times w_j \quad (5)$$

と表わされ、平衡条件式、適合条件式、および構成式は、次のようになる。

<平衡条件>

$$D_{ij} S_j + \Delta A_i E_i = 0 \quad (6)$$

$$D_{ij} M_j + r_i D'_{ij} (u_j \times S_j) + \Delta A_i N_i = 0 \quad (7)$$

S_j ：接触力、 E_i ：物体力、 M_j ：接触モーメント、 ΔA_i ：粒子の面積、

D'_{ij} ：無向接続行列、 u_j ：枝の単位方向ベクトル、 N_i ：物体モーメント

<適合条件>

$$L_{kj} \Delta u_j = 0 \quad (8)$$

$$L_{kj} \Delta w_j = 0 \quad (9)$$

$$L_{kj} \Delta u_j = L_{kj} (l_j u_j \times w_j) \quad (10)$$

<単純な弾性を考慮にいれた構成式²⁾>

$$u_j \cdot S_j = E u_j \cdot \Delta u_j \quad (11)$$

$$(I - u_j u_j) \cdot S_j = G (I - u_j u_j) \cdot \Delta u_j \quad (12)$$

$$M_j = H \Delta w_j \quad (13)$$

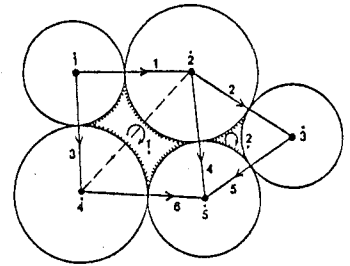


図-1 置換グラフ

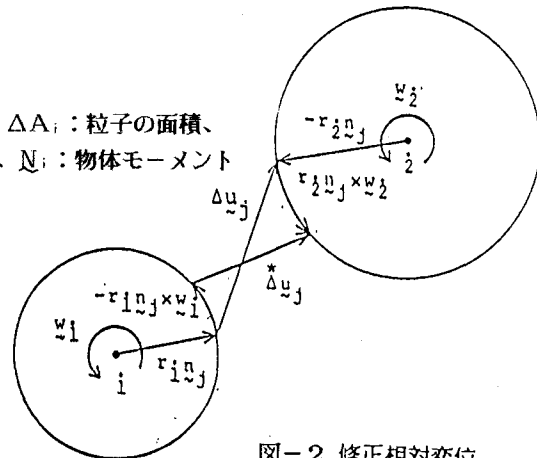


図-2 修正相対変位

E, G, H: それぞれ直応力、せん断力、モーメントに関する弾性係数

3. 3次元解析: 3次元グラフにおいては、一般に非平面グラフであり、具体的には、ループ行列において、各列に、+1と-1が、それぞれ1個ずつ含まれるという性質を満たさなくなる。その結果、双対関係が、2次元の場合とは、異なり、(3)、(4)は、成り立たない。そこで、まず、粒状体とグラフとの対応関係から考察し直すと、2次元の場合では、粒状体の間隙には、ループが対応していたが、3次元では、ループは間隙を表現してはおらず、ループに囲まれた多面体が、間隙に対応するようになる。3次元の間隙は、全部連結しているが、ここでは、ループで囲まれた部分を、一つの間隙とみなすこととする。この多面体をセル (cell) と称し、セルとループの結びつきを表現する行列を導入することによって、3次元での双対関係を求める。今、修正グラフについて考えると、セルの中心は、各ループ (この場合すべて三角形) の内心を通りループを垂直に突き抜ける直線の交点となる。

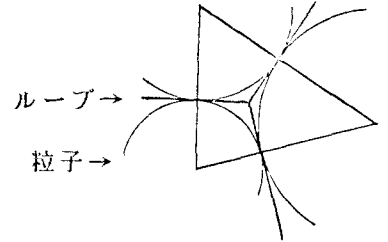
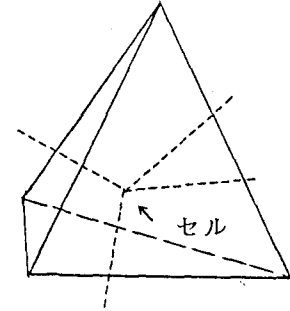


図-3 3次元における間隙とグラフの対応



(図-3は、2次元的に示したもので接線がループ、接線の交点が、枝になっている) これは、双対グラフでの点となり、ループと垂直な線分は、枝となる。また、この交点は、多面体の外接球の中心 (外心) となっている。このような、双対グラフの決め方は、実は、Voronoi-Delaunay分割であり、(置換グラフが、Delaunay四面体、双対グラフが、Voronoi多面体) この分割によって、双対グラフでは、1つのセルの中に1つの粒子が存在することになり、粒子1つ1つが、領域一なわばりをもつようになる。次に、基本行列について考察する。有向グラフでのループの向きについては、双対グラフの枝の方向に、右ねじをまわした向きとする。このとき、セルとループの関係をあらわす行列を、セル行列 V_{ki} (i は、セルを表す指標) を定める。このとき、前出の接続行列 D_{ij} 、ループ行列 L_{jk} 、およびこのセル行列 V_{ki} の間には、2次元のときの恒等式 (1)、(2) のほかにつぎのような恒等式が成り立つ。

$$L_{jk} V_{ki} = 0 \quad (14)$$

$$V_{ik} L_{kj} = 0 \quad (15)$$

(ここで、 k について和をとる。)

さらに、3次元の場合において成り立つ双対関係は

$$V_{ki} T = D_{ki} \quad (16)$$

$$L_{jk} F = L_{jk} \quad (17)$$

$$D_{ij} T = V_{ij} \quad (18)$$

また、平衡条件式、適合条件式、構成式については、前章で提示した式(6) ~ (13) が、3次元においてもそのまま適用できる。

4. あとがき: この解析によって、力学的な条件式は、2次元のものが、3次元にも適用されることがわかった。今後は、3次元における接触数と余裕数の関係、ループの独立性、間隙力の定式化などの問題について解決してゆきたい。

<参考文献>

- 1) Satake, M; Graph-theoretical approach to the mechanics of granular materials, Continuum Models of Discrete System (ed. A. J. M. Spencer), A. A. Balkema, pp.163-173, 1987
- 2) Satake, M; Constitution of mechanics of granular materials through graph representation, Theoretical and applied mechanics, vol.26, University of Tokyo press, 1976