

II-52 自由透過条件設定についての考察

東北大学工学部 正員○今村文彦

東北大学工学部 正員 首藤伸夫

1. はじめに

境界条件の設定は数値計算結果を左右する重要な要素である。この設定方法の多くは確立されつつあるが、いくつかの条件下では未だ設定が難しい。二次元伝播問題での自由透過条件もその1つである。理由の第一は、計算領域内で生じる透過波の伝播方向を算出することの難しさにある。最近、仮想汀線による設定法（日野・中座(1987)）が提案されており、この方法の有効性の検討も含め、本研究では自由透過条件の設定法について考察する。

2. 一次元伝播問題

計算領域内の波成分を、境界上での水位の制御により透過させる条件について考える。仮想境界汀線方法は、図-1に示した計算点で線流量 $M_{ib+1/2}^{k+1/2}=0$ （ k, i :時間及び空間格子番号, ib :透過境界の格子番号）として仮想汀線を仮定し、完全重複波を生じさせることにより透過波成分を求める方法である。この時、連続の式（ $\partial\eta/\partial t + \partial M/\partial x = 0$, η :水位）は以下の差分式となる。

$$\eta_{ib}^{k+1} = \eta_{ib}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} [M_{ib+1/2}^{k+1/2} - M_{ib-1/2}^{k+1/2}] = \eta_{ib}^k + \frac{\Delta t}{\Delta x} M_{ib-1/2}^{k+1/2} \quad (1)$$

仮想汀線では完全反射するため、(1)式で得られた重複波波高の半分を透過波は持つはずである。したがって、透過波成分は以下のように求まる。

$$\eta_{ib}^{k+1} = \frac{1}{2} [\eta_{ib}^k + \frac{\Delta t}{\Delta x} M_{ib-1/2}^{k+1/2}] \quad (2)$$

この方法は、二次元に拡張しても透過波の方向を知る必要がないという利点を持つ。

(2)式の有効性を知るために、もう1つの方法である特性曲線法による方法との比較を行う。この方法は、ある特性曲線上の特性量が保存されることを利用する。線形長波理論の仮定を用いると、図-2に示したA点の既知量から、B点での未知量が求まる。A点での値を線形補間を用いて求めると、

$$\eta_{ib}^{k+1} = (1-K)\eta_{ib}^k + K\eta_{ib-1}^k \quad K = Co \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad Co = \sqrt{gh} \quad (3)$$

となる。この値は補間による誤差を許容する範囲で厳密解であるが、二次元伝播への適用が難しい。

(2), (3)式を比較するため、(2)式中の M を進行波の線形関係を用いて η に置き換えると(2)式は

$$\eta_{ib}^{k+1} = \frac{1}{4}(2+K-K^2)\eta_{ib}^k + \frac{1}{4}K(1+K)\eta_{ib-1}^k \quad (4)$$

となる。上式は(3)式とは一致しない。これは図-3にあるように、 $ib+1/2$ で完全反射条件を与えても、空間的に $\Delta x/2$ ずれるため、 ib 点では透過波の波高が重複波の半分にならないためである。(3), (4)式の差を求めると次式になる。

$$Er = \frac{|(3)-(4)|}{|(4)|} = \frac{|(-2+5K-K^2)/4 + (-3K+K^2)\text{Exp}(i\kappa\Delta x)/4|}{|(1-K)+K\text{Exp}(i\kappa\Delta x)|} \rightarrow \frac{|K-1|}{2}, \quad (\kappa\Delta x \ll 1) \quad (5)$$

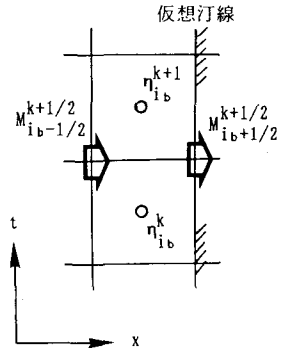


図-1 日野・中座による仮想汀線法

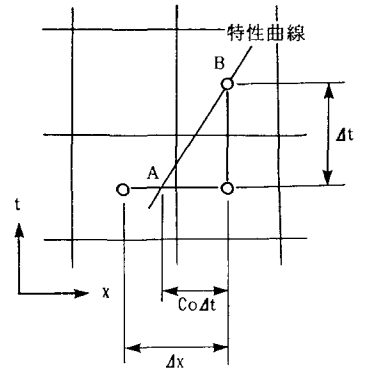


図-2 特性曲線法を用いた透過方法

上式は $\text{Exp}(i\kappa\Delta x)=1$ ($\kappa\Delta x\ll 1, \kappa$:波数) のとき $(K-1)/2$ となり、波長に対して空間格子間隔を小さくしても誤差は存在し、これは K 値によって左右される。(2)式のような形式で(3)式と一致させるには、(2)式の右辺の各項に修正係数を乗じさせればよい。この結果は、

$$\eta_{ib}^{k+1} = \frac{1-K}{1+K} \eta_{ib}^k + \frac{2}{1+K} \frac{\Delta t}{\Delta x} M_{ib-1/2}^{k+1/2} \quad (= \frac{1-K}{1+K} \eta_{ib}^k + \frac{2K}{1+K} \eta_{ib-1/2}^k) \tag{6}$$

となる。上式は特性関係を用いて、既知量 $\eta_{ib}^k, M_{ib+1/2}^{k+1/2}$ から η_{ib}^{k+1} を内挿した結果と一致する。

表-1 に示された条件下で、一次元水路の左端から正弦波を入射させ、右端で透過させる計算を行った。各経過時間毎の、本来の透過波に対する相対誤差を表中に示す。(3),(6)式では誤差が1%以下と精度が高く、(2)式では25%前後になる。また、(2)式による計算誤差は(5)式による誤差推定値とはほぼ等しい。

3. 二次元伝播問題への拡張 (6)式を二次元伝播問題へ適用するには、この式に対する差分スキームの解釈が必要である。いま、図-4 に示された状況で、二つの条件を取入れ、(6)式と一致する差分スキームを考える。その条件の第一は、 $(k+1/2, ib)$ で完全反射の条件を導入すること、第二は、時間微分に関して修正係数を考えることである。その結果、一次元では以下の差分式になり、二次元へ拡張する場合には y 方向の線流量についての項を加えればよい。

$$\frac{1}{\Delta t} [\frac{1+K}{2} (2\eta_{ib}^{k+1}) - (1-K)\eta_{ib}^k] + \frac{1}{\Delta x} [M_{ib+1/2}^{k+1/2} - M_{ib-1/2}^{k+1/2}] = 0 \tag{7}$$

(1)式と上式の違いは、図-4 での条件で分かるように、仮想汀線の導入位置を水位の計算点と同じに設定したことである。時間微分の修正係数に対する意味付けは今後の課題である。表-1 と同じ条件下で実際の二次元計算を行い、(7)式の修正された差分スキームを用いると、最大で15%の誤差を抑えることが出来た。これは(1)式による場合の半分であり、長波近似による方法に対しても1/3程度になる。なお、誤差の大きい箇所は計算座標に対し透過波が斜めに伝播する場所である。

4. おわりに 以上、仮想汀線を水位の計算点と同じ位置に置き換えることにより、仮想汀線法の改良を行った。二次元伝播問題でも精度の向上が期待できるが、斜め入射に対する改良と(7)式中の時間差分の意味付けなどの課題がある。ここでは、線形理論に限定したが、合田・柿崎(1966)による有限振幅重複波の結果を引用し、反射率を変化させることにより非線形問題へも拡張できる可能性を持つ。

参考文献：日野・中座(1987), 第35回海講, 合田・柿崎(1966), 港研報告第5巻.

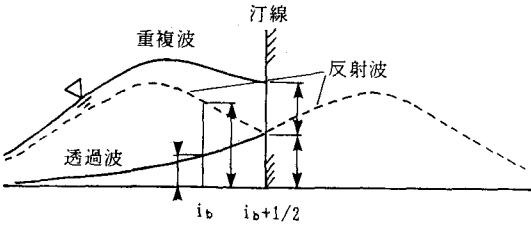


図-3 汀線付近での重複波

表-1 一次元伝播での相対誤差

($\eta=H\sin(2\pi t/T)$, $H=0.01\text{m}$, $T=2.0\text{秒}$, $\Delta t=0.01\text{秒}$)

時間	水位	(2)式	(3)式	(6)式
1/20T	0.310H	26.68%	0.10%	0.08%
2/20T	0.587H	25.87%	0.08%	0.03%
3/20T	0.809H	25.46%	0.04%	0.02%
4/20T	0.951H	25.21%	0.04%	0.02%
5/20T	1.000H	25.10%	0.03%	0.02%

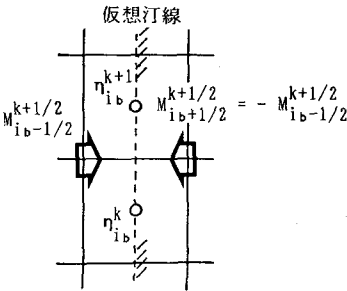


図-4 修正された仮想汀線法