

II-51 津波計算の離散化誤差 — 事後接近法による評価 —

東北大学工学部 学生員 ○渡辺智洋
 東北大学工学部 正 員 今村文彦
 東北大学工学部 正 員 首藤伸夫

1. はじめに； 離散化誤差を評価するためには，数値誤差が含まれない理論解が必要であるが，実際にはこの理論解の存在しない場合が多い。そこで，効果的な評価方法はRichardsonにより提案された事後接近法である。本研究では，先ず，事後接近法の有効性を調べるために，一次元伝播問題において，この方法により得られた収束解とこれに対する理論解とを比較する。次に，二次元伝播での数値計算における離散化誤差の程度と場所的变化を評価し，その原因説明を回転，ずり変形，伸び縮みなどの流体変形運動の変化により検討する。

2. 事後接近法の有効性について； この方法は，離散化間隔 Δx を変えた計算結果を用い，離散化間隔を無限小にして得られる収束値を推定するものである。この時，収束値と計算結果の差，すなわち離散化誤差のモデル化が重要となる。ここでは， Δx に対するべき乗とする。今，3種類の離散化間隔 $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ に対する結果を Z_1, Z_2, Z_3 ，この収束値を Z とすると，次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} Z - Z_1 &= A * (\Delta x_1)^B \\ Z - Z_2 &= A * (\Delta x_2)^B \\ Z - Z_3 &= A * (\Delta x_3)^B \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

上式を連立させて解くことにより未知数である Z, A, B ，が求められる。 A は離散化誤差の符号（収束する方向）を， B は収束する速さを，表わす係数となる。ここで， $\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3 = 4 : 2 : 1$ とすると

$$B = \log_2 \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_3 - Z_2} \right), \quad A = \frac{Z_2 - Z_1}{(\Delta x_1)^B - (\Delta x_2)^B} \quad (2)$$

が得られる。

今，図-1に示したように，途中に一定勾配斜面を持つ一次元水路において，波高1.0m，波長6000m，の孤立波の第一次近似を入力させ，理論解とこの事後接近法による収束値との比較を試みる。比較計算は浅水理論を支配方程式とし，Leap-frog法を用いた差分により行った。ただし，波高水深比が1/100から1/200と小さいため，非線形効果は小さい。比較対象は，斜面上での波高とする。斜面勾配も緩やかであり，反射率は小さいので，理論解はGreenの定理により求められる。(1)式によれば，3種類の計算結果から収束値を求めることが可能であるが，ここでは4種類を取り上げ，組合せの違いによる収束値の差も検討する。 $\Delta x = 100m, 50m, 25m$ のデータから得られた収束値を Z_a ， $\Delta x = 50m, 25m, 12.5m$ のデータから得られた収束値を Z_b とする。図-2は，理論解と収束値の比較結果であり， Z_a, Z_b ともに理論値との差は小さく誤差0.5%以内に収まる。また， Z_a の場合に収束解が少なく， Z_b つまり格子間隔を細かく選んで事後接近法を用いた方が有利である。

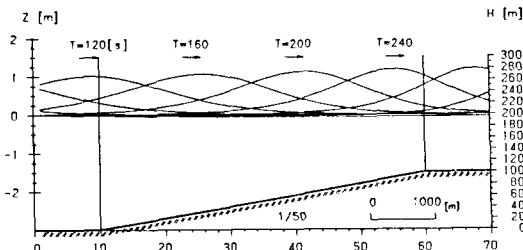


図-1 1次元伝播問題

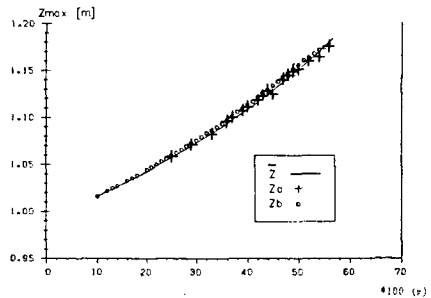


図-2 収束値 (Z_a, Z_b) と理論解 (\bar{Z}) の比較

3. 二次元水路での離散化誤差； 図-3に示すような，途中に長方形障害物を持つ水路（水深100mの水平床）を対象にして， $\Delta x=50\text{m}, 25\text{m}, 12.5\text{m}$ の3種類の格子間隔を用いて離散化誤差を評価した。水路の左端から波高1.0m，波長2000mの孤立波の第一次近似を入力させ，右端で透過させた。図-3は，孤立波の波峰が障害物に差しかけた時の水位分布と流速ベクトルを示す。障害物の角付近で流速は急激に変化している。表-1は，図-3に表わす代表的な6地点について，水位及び流速の離散化誤差を調べた結果である。この表から，障害物の角を除き水位，流速ともに離散化誤差は小さいこと，この角では，水位に対し流速の離散化誤差が顕著であることが明らかである。

運動量の釣合を考えた場合，水位についての離散化誤差が小さいため，圧力項には離散化誤差発生の原因はなく，加速度項，特に流体の移動にともなう加速である移流項に関係すると考えられる。流体の運動は，(i)回転 (ii)ずり変形 (iii)伸び縮み の基本的な変形に分解できる。そこで，図-3における流速分布から離散化間隔の違いによる，この変形運動の差を調べた。その結果，3つの変形とも障害物の角付近で差が大きいたことが分かった。特に，障害物の下流側の角に着目して， Δx の異なった計算での変形運動の時間的変化を調べた結果を図-4に示す。回転，ずり変形については角周辺部の最大値と最小値を，伸び縮みについては絶対値の最大値を選んでいる。この図より，格子間隔の違いによる差は回転成分において最も顕著に表れており，格子間隔が半分になると値が3倍以上になる。その他の成分ではこの比率は2倍程度である。したがって，流速の離散化誤差は回転成分に最も影響し，この結果角付近での流速分布に差が生じたと言えるのである。

4. おわりに； 本研究では，事後接近法により水位と流速の離散化誤差の程度と場所的変化を評価した。その結果，急縮，急拡部分で水位の離散化誤差よりも流速の離散化誤差の方が大きいことが判明し，これは，3種類の流体変形運動のうちで回転成分により最も影響されることがわかった。今後，基礎方程式，特に移流項での打ち切り誤差との関連や，離散化間隔による角付近での流速勾配の変化について検討する必要がある。

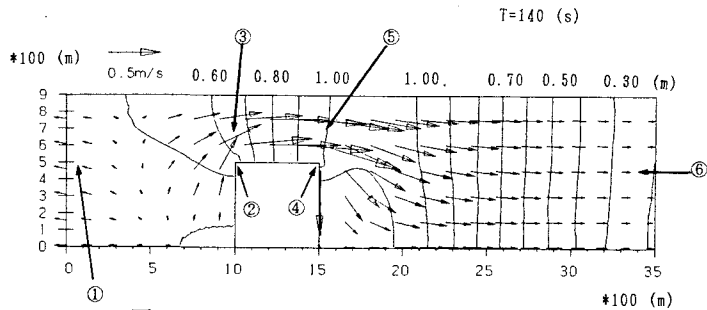


図-3 水位分布および流速ベクトル

表-1 各地点での離散化誤差 (%)

Δx	①		②		③		④		⑤		⑥	
	水位	流速	水位	流速	水位	流速	水位	流速	水位	流速	水位	流速
12.5m	0.03	1.06	0.60	4.34	0.52	0.56	0.00	4.62	1.00	0.63	0.40	0.59
25.0m	0.14	2.20	0.83	7.40	0.74	1.34	0.00	7.35	1.10	0.98	0.70	1.02
50.0m	0.60	4.57	1.15	12.6	1.06	3.21	0.01	11.7	1.21	1.50	1.23	1.74

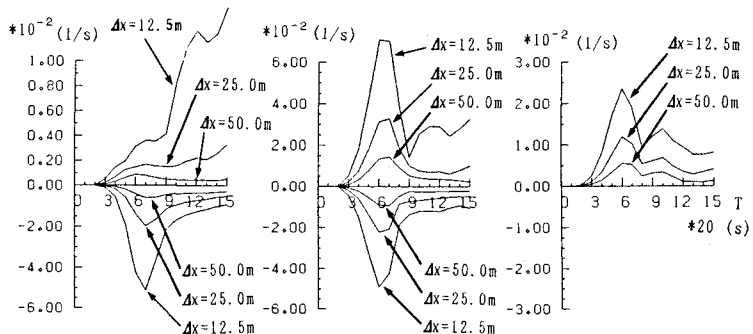


図-4 地点④での流体変形