II－13　砂移動の方程式について

東北大学大学院 学生員 ○ 邵　小敏
東北大学工学部 正　員　田中　仁
東北大学工学部 正　員　首藤　伸夫

1．はじめに

流れによる砂移動の研究としては，水平床かつ平衡状態における掃流砂量に関するものが多い．しかし，実際には河床は水平床とは限らず，また非平衡性を無視できない場合も多い．したがって，掃流砂量式に対して河床勾配の影響及びその修正の方法を検討する必要がある．また，流砂の非平衡性に関しては幾つかの研究がなされているが，運動量と質量の保存則に基づく検討は十分ではない．本研究では，これらに関しての議論を行なう．

2．斜面での平衡流砂量公式

斜面上の砂粒子が移動する時，その位置エネルギーは変化する．そこで，パワー・モデルを用いて，その影響の補正方法を導く．

斜面において，単位面積あたり重量Gの砂が速度U_{bs}で移動する時，摩擦力による仕事率R_W，重量Gの砂が高度が低下することによって失われるパワーG_W，流れの有効剪断力のなすパワーF_Wはそれぞれ次式で表される．

$$R_W=q_{bI}\mu_s\cos\theta\ ;\quad G_W=q_{bI}\sin\theta;\quad F_W=(\tau_I-\tau_{Ic})U_{bI}e_b \qquad \cdots\cdots(1)$$

ここで，μ_s：摩擦係数，θ：斜面勾配，$q_{bI}(=G*U_{bs})$：斜面での掃流砂量，τ_I，τ_{Ic}：斜面上に働く剪断応力および移動限界剪断応力，U_{bI}：底面の近くの流速，e_b：効率である．斜面上の移動限界剪断応力τ_{Ic}と水平上のそれτ_cとの関係は次式のように現わされる[1]．

$$\tau_{IC}=F_I\tau_c,\quad F_I=\cos\theta(1-\mu_s^{-1}\tan\theta) \qquad \cdots\cdots(2)$$

パワーの釣合い式は，$R_W=G_W+F_W$であるので，斜面と水平床（$\theta=0$）の流砂量はそれぞれ式（３），式（４）の様に表される．

$$q_{bI}F_I\mu_s=(\tau_I-F_I\tau_c)U_{bI}e_b \quad ,\ \theta\neq0 \qquad \cdots\cdots(3)$$

$$q_b\mu_s=(\tau-\tau_c)U_be_b \quad ,\ \theta=0 \qquad \cdots\cdots(4)$$

ここで，添え字Ｉの無い物理量は水平床上での量を表す．式（３）と式（４）との比較より，斜面の場合には次式から得られるτを用いることにより，水平床時の砂移動との相似性が保たれることがわかる．

$$\tau_I=F_I\tau \qquad \cdots\cdots(5)$$

ここで，$U_b=Au_*$[1]とすれば，式（５）から $U_{bI}=\sqrt{F_I}U_b$ が得らる．よって，式（３），（４）から次の式が成り立つ．

$$q_{bI}=\sqrt{F_I}q_b \qquad \cdots\cdots(6)$$

すなわち，斜面での剪断力τ_Iによる流砂量q_{bI}と，水平床での剪断力$\tau(=\tau_I/F_I)$による流砂量q_bの比は$\sqrt{F_I}$である．したがって，水平床上での流砂量が$\tau-\tau_c$の関数として $q_b=f(\tau-\tau_c)$ と表されるならば，斜面での剪断力τ_Iによる流砂量q_{bI}は次式のように表現される．

$$q_{bI}=\sqrt{F_I}\ f(\tau_I/F_I-\tau_c) \qquad \cdots\cdots(7)$$

ここで，$\tau/\tau_c\to\infty$の条件を課し，さらにτ_Iの大きさがτに等しいとすれば，式（３）と式（４）から式（８）が得られる．

$$q_{bI}=f(\tau_I)/F_I \qquad \cdots\cdots(8)$$

$\tau/\tau_c\to\infty$の時，流砂量式は $q_b=b\tau^{3/2}$ と表されることが多い[2]ので，これを用いれば式（７）は式（８）と同じ形になる．すなわち，斜面における掃流砂量式には，重量の影響を剪断力にのみ加味する場合が多いが，式（７）のように流砂量に対しても修正を施さなければならない．

3．一般的な砂の運動方程式・連続式の導出

砂粒子の運動は，本来確率的であるが，平均的な掃流砂量を求めるためには，必ずしも別々の砂粒子の運

動特性から論議する必要はない．ここでは，決定論的な方法を用い，運動量と質量の保存則に基づいて，砂の運動方程式および連続式を導く．

(1).砂の運動方程式： 河床高さをZ，掃流砂層の上境界の高さをZ_1，砂の濃度をCとする時，微小要素ABに働く力を図－１に示した．ここで，p: 圧力，σ：砂の密度，ΔS：ABの長さ，C_d：抵抗係数，A： 単位面積当たりの移動砂の斜面に垂直な面への投影面積，U_b-U_s：底面近くの流速U_bと砂の平均移動速度U_sの差である．Vは次式で与えられる掃流層の厚さである．

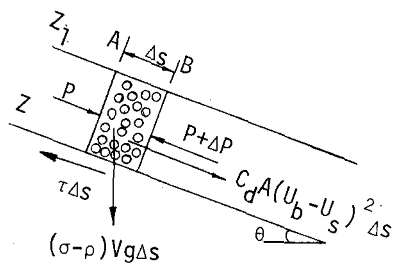
$$V = \int_{Z}^{Z_1} C dZ$$

底面摩擦力τは次式で表わされる[1]．

$$\tau = \tau_c + (\sigma-\rho) V g \mu_f \cos\theta$$

運動量保存則式の両辺にU_sをかければ，次式が得られる．

$$\sigma U_s \frac{\partial}{\partial t}(q_B) + \sigma U_s \frac{\partial}{\partial s}(q_B U_s) = (\sigma-\rho) q_B g \sin\theta - U_s \frac{\partial}{\partial s}(pV) + (C_d A (U_b-U_s)^2 - \tau_c) U_s - (\sigma-\rho) q_B g \mu_f \cos\theta \quad \cdots\cdots (9)$$



図－１　微小要素ABに働く力

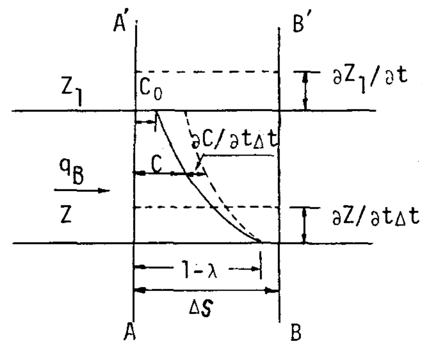
右辺第３項は流れからの有効仕事率であり，非平衡状態においても平衡状態の値を準用する．さらに，流砂量の経時変化と圧力の影響を無視すれば，上式は次のように変形される．

$$\frac{\partial}{\partial s}(q_B U_s) = \frac{(\sigma-\rho)\mu_f F_I}{\sigma U_s}(q_{Be} - q_B) \quad \cdots\cdots\cdots (10)$$

ここで，q_{Be}は平衡状態での掃流砂量である．式（１０）は，砂の運動量$q_B U_s$の場所的変化が，非平衡流砂量と平衡流砂量との差を生むことを示している．

(2).砂の連続式： 河床高さZでの濃度Cを$1-\lambda(\lambda=0.4)$，Z_1での濃度をC_0とすれば，図－２に示す微小要素AA′BB′に対する連続式は次式のようになる．

$$-\frac{\partial q_B}{\partial s} = (1-\lambda)\frac{\partial Z}{\partial t} + C_0 \frac{\partial Z_1}{\partial t} + \int_Z^{Z_1} \frac{\partial C}{\partial t} dZ \quad \cdots\cdots (11)$$



図－２　微小要素AA′BB′の質量変化

上式において掃流層内で$\partial C/\partial t=0$，上部境界で$C_0=0$とすれば，式（１１）は通常用いられる砂の連続式になる．砂の濃度Cの局所的な変化率と移流項が同じオーダーである場合，掃流層内において$\partial C/\partial t$の影響が無視できるので，式（１１）右辺第３項は消える．しかし，一般に$C_0=0$とはならないので，式（１１）は従来の砂の連続式には一致しない．ライプニッツの定理を用いて，式（１１）をさらに変形すれば次式を得る．

$$(1-\lambda)\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial q_B}{\partial s} = -(1-\lambda)\frac{\partial Z}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}(q_B/U_s) \quad \cdots\cdots\cdots (12)$$

４．結　論

本研究で得られた主要な結果は次の通りである．

（１），パワー・モデルを用いて，流砂量式に対する河床勾配の影響を検討し，その補正方法を提案した．

（２），砂の運動量方程式を導き，さらに平衡状態と非平衡状態の掃流砂量との関係を表わす微分方程式，式（１０）を得た．また，砂の連続式として，式（１２）が得られた．

参考文献

１），邵・田中・首藤(1990)：越流による砂州崩壊に関する実験，水工学論文集第34巻，PP.373-378

２），M.Selim Yalin(1972), Mechanics of Sediment Transport, Pergamon press Ltd.,PP.116